数理解析研究所講究録
第94巻 1970年 93-102

群多様体に附随する bialgebra の構造について

広島大 理　柳原弘志

§1 local semi-derivations

k を標数 $p>0$ の体とし，$(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$ を k を含む局所環で，$\mathcal{O}/\mathfrak{m} \cong k$ とする．D を $\mathcal{O}$ から k への k-linear map で，次の条件をみたすとき，height r の local semi-derivation という．

i) $D(fg) = D(f)g(0) + f(0)D(g)$, $\quad f \in \mathcal{O}$, $g \in \mathcal{O}^{p^r}$

但し $f(0)$, $g(0)$ は k の元で $f - f(0) \in \mathfrak{m}$, $g - g(0) \in \mathfrak{m}$ となるものである．更に

ii) $D(\mathcal{O}^{p^r}) = 0$

をみたすとき，D は special semi-derivation of ht. r とよぶ。

$\mathcal{D}_r(\mathcal{O})$ で ht. r の semi-derivation 全体のなす k 上のベクトル空間，$\mathfrak{S}_r(\mathcal{O})$ で ht. r の special semi-derivation 全体のなす $\mathcal{D}_r(\mathcal{O})$ の部分空間をあらわすと

$$\mathfrak{S}_r(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{D}_r(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{S}_{r+1}(\mathcal{O})$$

が容易に分る。

Proposition 1. $\mathcal{O}$が正則局所環で rank が n なら

$$\dim_k \mathfrak{S}_r(\mathcal{O}) = p^{nr}-1, \qquad \dim_k \mathfrak{D}_r(\mathcal{O}) = p^{nr}-1+n.$$

§2. 代数函数体の semi-derivations

kを標数 $p>0$ の体で Kをk上有限生成かつ分離的な拡大体とし，$K_r = kK^{p^r}$とおく。このとき，Kの k-linear endomorphism Dが次の条件をみたすとき，ht. r の Kのk上の semi-derivation という。

i) $x \in K_r$ ならば $D(x) \in K_r$

ii) $D(xy) = D(x)y + xD(y)$, $\quad x \in K$, $y \in K_r$.

更にDが

iii) $D(K_r) = 0$

をみたせば，special という.

$\mathfrak{D}_r(K/k)$ で ht. r の K/k の semi-derivation 全体の集合をあらわせば，これはK_r上のベクトル空間になる。同様に$\mathfrak{S}_r(K/k)$ で ht. r の K/k の special semi-derivation 全体をあらわせば，$\mathfrak{S}_r(K/k)$ は K上のベクトル空間になる。

そして，　$\mathfrak{S}_r(K/k) \subset \mathcal{D}_r(K/k) \subset \mathfrak{S}_{r+1}(K/k)$

がなりたつ。

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ を K/k の分離超越基とするとき，

$$\begin{cases} D^{(r)}_{e_1\cdots e_n}(x_1^{e_1}\cdots x_n^{e_n}) = 1 \\ D^{(r)}_{e_1\cdots e_n}(x_1^{e_1'}\cdots x_n^{e_n'}) = 0 , \quad (e_1, \ldots, e_n) \neq (e_1', \ldots e_n') \end{cases}$$

（但し　$0 \leq e_i, e_j' < p^r$, $\sum_{i=1}^{n} e_i > 0$, $\sum_{j=1}^{n} e_j' > 0$ ）

をみたす $D^{(r)}_{e_1\cdots e_n}$ が $\mathfrak{S}(K/k)$ に存在し，これらが，

$\mathfrak{S}(K/k)$ の K 上の基になることが分る．特に，$\dim_K \mathfrak{S}(K/k)$

$= p^{nr}-1$ となる。（但し $n = \mathrm{tr.deg}_k K$）。更に，

$\mathcal{D}_r(K/k) = \mathfrak{S}_r(K/k) \oplus \sum_{i=1}^{n} K_r E_{i,r}$ となる K_r 上 1 次独立な

$\mathcal{D}_r(K/k)$ の元 $E_{1,r}, \ldots\ldots, E_{n,r}$ が存在することが分る．

次に k を完全体，X を k で定義された代数多様体で K を X の k 上の有理函数体とする。$x \in X$ に対し $\mathcal{O}_{x,X}$ を X の x における stalk とし K の部分環と同一視する．このとき $D \in \mathcal{D}_r(K/k)$ が $D(\mathcal{O}_{x,X}) \subset \mathcal{O}_{x,X}$ をみたせば，D は x で regular であるという。特に x が k-有理的で，X の単純点であるとする。$\{t_1, \ldots, t_n\}$ を $\mathcal{O}_{x,X}$ の正則パラメター系とすると次のことが分る．

Proposition 2.　$D \in \mathcal{D}_r(K/k)$ (resp. $D \in \mathfrak{S}_r(K/k)$)

が x で regular であるための必要十分条件は $D(t_1^{e_1}\cdots t_n^{e_n})$ と $D(t_j^{p^r})$ (resp. $D(t_1^{e_1}\cdots t_n^{e_n})$) が $\mathcal{O}_{x,X}$ に含まれることである. 但し $0 \leq e_i < p^r$.

$\mathcal{D}_r(X, x)$ で x で regular な $\mathcal{D}_r(K/k)$ の元全体の集合をあらわすと, $\mathcal{D}_r(X, x)$ は $\mathcal{O}^{(r)}$-module になる。但し, $\mathcal{O}^{(r)} = \mathcal{O}_{x,X} \cap K_r$. 同様に $\mathfrak{S}_r(X, x)$ を $\mathfrak{S}_r(K/k)$ の x で regular なもの全体とすると, $\mathcal{O}_{x,X}$-module になることが分る. そして, Prop. 2 より 次の結果を得る.

Proposition 3. X, x, $\{t_1, \ldots, t_n\}$ を Prop. 2 と同様とするとき, $\mathfrak{S}_r(X, x)$ は rank $p^{nr}-1$ の free $\mathcal{O}_{x,X}$-module, $\mathcal{D}_r(X, x) = \mathfrak{S}_r(X, x) \oplus \sum_{i=1}^{n} \mathcal{O}^{(r)} E_{i,r}$ となる.

次に $\mathcal{O}_{x,X}$ の local semi-derivation と $\mathcal{D}_r(X, x)$ の関係を考える. $D \in \mathcal{D}_r(X, x)$ のとき, $f \in \mathcal{O}_{x,X}$ に対して

$$D_x(f) \equiv D(f)(x)$$

とおくと, これは k の元で D_x は $\mathcal{D}_r(\mathcal{O}_{x,X})$ にぞくすることが容易に分る. D_x を D の x における local component という。明らかに, $D \in \mathfrak{S}_r(X, x)$ なら $D_x \in \mathfrak{S}_r(\mathcal{O}_{x,X})$ になる. π_x で, この $\mathcal{D}_r(X, x)$ から $\mathcal{D}_r(\mathcal{O}_{x,X})$ への対応 $D \rightarrow D_x$ を

あらわすことにする.

Proposition 4. $\pi_x : \mathfrak{G}_r(X, x) \longrightarrow \mathfrak{G}_r(\mathcal{O}_{x,X})$ は surjection で, kernel は, $\mathfrak{m}_{x,X}\mathfrak{G}_r(X, x)$ となる.
但し, $\mathfrak{m}_{x,X}$ は $\mathcal{O}_{x,X}$ の極大イデアルである.

X, Y を k で定義された代数多様体で, α を $X \to Y$ の k-morphism, x を X 上の k-有理点とする. $y = \alpha(x)$ とすると, $\alpha^* : \mathcal{O}_{y,Y} \to \mathcal{O}_{x,X}$ なる k-準同型を得る.

$D \in \mathcal{D}_r(\mathcal{O}_{x,X})$ とするとき, 容易に分るように, $D \circ \alpha^*$ は $\mathcal{D}_r(\mathcal{O}_{y,Y})$ の元である. このとき, $\alpha_*(D) = D \circ \alpha^*$ と定義する. α_* を tangential map とよぶ.

§3. 群多様体の不変 semi-derivations

以後, k は標数 $p>0$ の代数的閉体とする.

G を k で定義された群多様体, $K = k(G)$ を G の k 上の有理函数体とする. a を G の k-有理点とし, L_a を $x \to ax$ なる G から G への k-morphism とする. このとき, L_a により, $K = k(G)$ の k-自己同型 L_a^* が引きおこされる.
K/k の semi-derivation D に対して, $DL_a^* = L_a^* D$

なる関係が，Gのすべてのk-有理点に対してなりたつとき，Dを左不変な semi-derivation とよぶ。これは次の条件と同値である．

i) DはGの各点で regular

ii) a, bをGのk-有理点とするとき，$D_{ab}=(L_a)_*(D_b)$。

更に，Gがアーベル多様体であれば，i)からii)は従う．

$\mathfrak{g}(G)$でGの左不変な semi-derivation 全体の集合をあらわすことにするとき，$\mathfrak{g}_r(G)=\mathfrak{g}(G)\cap\mathcal{D}_r(k(G)/k)$，$\gamma_r(G)=\mathfrak{g}(G)\cap\mathfrak{S}_r(k(G)/k)$とおく．次のことが分る。

(イ) eをGの単位元とするとき，$\Pi_e : \gamma_r(G)\to\mathfrak{S}_r(\mathcal{O}_{e,G})$は$k$-同型，特に，$\gamma_r(G)$は$k$上$p^{nr}-1$次元の$k$上のベクトル空間となる．（但し，$n=\dim. G$）．又，$\{t_1,\dots,t_n\}$を$\mathcal{O}_{e,G}$の正則パラメター系とするとき，

$$\begin{cases} D_{e_1,\dots,e_n}(t_1^{e_1}\cdots,t_n^{e_n})=1 \\ D_{e_1,\dots,e_n}(t_1^{e_1'}\cdots,t_n^{e_n'})=0 \quad \text{for } (e_1,\dots,e_n)\neq(e_1',\dots,e_n') \end{cases}$$

となる$\mathfrak{S}_r(\mathcal{O}_{e,G})$の元$D_{e_1\dots e_n}$が存在するが，$(0\leq e_i<p^r)$これに対して，$I_{e_1\dots e_n}\in\gamma_r(G)$を

$$\Pi_e(I_{e_1\dots e_n})=D_{e_1\dots e_n}$$

となるようにとる．

(ロ) $H_r(G) = k \oplus \gamma_r(G)$ は k 上の Hopf algebra の構造をもつ。algebra としての構造は，$\mathrm{Hom}_k(K, K)$ の sub-algebra としての構造であり，coalgebra としての構造は

$$\Delta(I_{e_1 \cdots e_n}) = \sum_{(e')+(e'')=(e)} I_{e_1' \cdots e_n'} \otimes I_{e_1'' \cdots e_n''}$$

（但し 和は $e_i = e_i' + e_i''$ $(i=1,2,\ldots,n)$ をみたすもの全体にわたるものとする。又 $I_{0 \cdots 0} = \text{identity}$.）

によって定義される。antipode は $x \to x^{-1}$ なる $G \to G$ の k-morphism から自然に与えられる。この Hopf algebra は cocommutative である。又，$H(G) = \bigcup_{r=1}^{\infty} H_r(G) = k \oplus \mathfrak{g}(G)$ とおくと，これに cocommutative Hopf algebra の構造が入いることは明らかである。

(ハ) G が commutative であるための必要十分条件は，$H(G)$ が commutative algebra になることである。

§4. Purely inseparable isogenies

G, G' を k で定義された群多様体，α を $G \to G'$ の isogeny とする。このとき，$L = k(G')$ は $K = k(G)$ の部分体と同一視出来る。$A_\alpha = \mathrm{Hom}_L(K, K)$ とおき，$N(\alpha)$ を A_α の元 u で $uL_a^* = L_a^* u$ が G のすべての k-有理点 a に対してなりたつ

ものからなる k-subalgebra とする。このとき，$N(\alpha)^+ = \{u \in N(\alpha) \mid u(1) = 0\}$ とおくとき，$L = \{f \in K \mid u(f) = 0$ for $u \in N(\alpha)^+\}$ となり，かつ $N(\alpha) = k \oplus N(\alpha)^+$ で k 上の Hopf algebra となることが Cartier によって知られている。特に α が purely inseparable isogeny のとき，この $N(\alpha)$ は上で述べた $H(G)$ の Hopf subalgebra になることが分る。更に a を G の k-有理点とするとき，R_a を $R_a(x) = xa$ なる $G \to G$ の k-morphism とする。$u \in \mathrm{Hom}_k(K, K)$ に対し，$ad_a(u) = R_a^{*-1} u R_a^*$ とおき，ad を G の adjoint 表現という。このとき次の定理を得る。

Theorem 1. G を k で定義された群多様体とするとき，G の purely inseparable isogeny $\alpha : G \to G'$ と，$H(G)$ の adjoint 表現で不変な有限次元の Hopf subalgebra は 1 対 1 に対応する.

α を $G \to G'$ の purely inseparable isogeny とし，$N(\alpha)$ をその対応する $H(G)$ の Hopf subalgebra とする．$N(\alpha)$ は有限次元の cocommutative Hopf algebra であるから，その linear dual $N(\alpha)^D$ は commutative Hopf algebra になり，$\mathrm{Spec}(N(\alpha)^D)$ は finite group k-scheme の構造をもつ。

一方，e' を G' の単位元，$\mathfrak{m}'$ を $\mathcal{O}_{e',G'}$ の極大イデアルとするとき，$\mathfrak{a} = \alpha^*(\mathfrak{m}')\mathcal{O}_{e,G}$ とおくと，$R = \mathcal{O}_{e,G}/\mathfrak{a}$ は Artin local ring となる。そして，$N(\alpha)^D$ と R は k-algebra として同型であることが示される。又 $N(\alpha)^D$ の co algebra としての構造は G の group multiplication から導かれることが分る。更に，この $\mathrm{Spec}(N(\alpha)^D)$ が $\alpha : G \to G'$ の核とみなされることが分る.

§5. Purely inseparable isogeny と modular 拡大.

G, G', α 等は §4 と同じとする。$L = k(G')$ を $K = k(G)$ の部分体と同一視しておく。このとき，Hopf algebra $N(\alpha)$ に対して，$w : N(\alpha) \otimes_k K \to K$ を $w(u \otimes f) = u(f)$ によって定義すると，w は Sweedler の意味で $k(G)$ から $k(G)$ に measure している。このことから K/L は modular 拡大であることが分る，一方，代数函数体の modular 拡大について次の結果が得られる.

Proposition 5. k を完全体，L を k 上の代数函数体とし，K は L の purely inseparable modular 拡大とする。$K = L(x_1) \otimes_L \cdots \otimes_L L(x_s)$，$[L(x_i) : L] = p^{e_i}$ ならば，L の元

$t_{s+1}, \cdots\cdots, t_n$ があって，$\{x_1, \ldots, x_s, t_{s+1}, \ldots, t_n\}$ が K/k の分離超越基，$\{x_1^{p^{e_1}}, \cdots\cdots, x_s^{p^{e_s}}, t_{s+1}, \ldots, t_n\}$ が L/k の分離超越基となる.

このことから，次の結果が容易に分る。

Theorem 2. k を代数的閉体とし，G, G' を k で定義された群多様体，α を $G \to G'$ の purely inseparable isogeny で k 上で定義されているとする。このとき，$\mathcal{O}_{e,G}$ の適当な正則パラメター系 $\{t_1, \ldots, t_n\}$ をとれば，$\{t_1^{p^{e_1}}, \cdots\cdots, t_s^{p^{e_s}}, t_{s+1}, \cdots, t_n\}$ が $\mathcal{O}_{e',G'}$ の正則パラメター系となる.

そして，$[k(G) : k(G')] = p^{e_1+\cdots+e_s}$. 又，$N(\alpha)^D$ は k-algebra として，$k[X_1, \ldots, X_s]/(X_1^{p^{e_1}}, \cdots\cdots, X_s^{p^{e_s}})$ と同型になる.

References

[1] H. Yanagihara, " On the structure of bialgebras attached to group varieties", to appear in J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I.

[2] K. Kosaki and H. Yanagihara, " On purely inseparable extensions of algebraic function fields", to appear in ibid.