数理解析研究所講究録
第94巻 1970年 103-117

高次微分などについて

東大 教養　服部 昭

§1. 高次微分

Osborn [1], Nakai [2] で研究されている high order derivation を少し異った観点から扱うことにより，簡易化と一般化が可能であることを述べる [3]. 以下で扱う環は単位元をもち，加群は unitary とする.

1.1. Rを可換環，Aをその上の可換多元環とする. Aの乗法 $\mu : A\otimes A \longrightarrow A$ の核を J で表わせば，Jは $A\otimes A$ の両側イデアルで，左イデアルとしては

$$j_a = 1\otimes a - a\otimes 1 \quad (a\in A)$$

によって生成される. 明らかに

$$(1.1) \quad J \cong A\otimes A/R \; ; \; a j_b \longleftrightarrow a\otimes \bar{b} \quad (A\text{-左加群の同型})$$

MをA-左加群とする. $\mathrm{Hom}_R(A, M)$ は作用 $(a\otimes b)f = a\circ f\circ b$ により A-両側加群になる. q次の differential operator の加群を次によって定義する：

$$D_q(A, M) = \{ D\in \mathrm{Hom}(A, M) \mid J^{q+1}(D) = 0 \}$$

J はイデアルだから，この条件は $J^{q+1}(D)(1)=0$ と同値である．とくに $D_0(A, M) = \mathrm{Hom}_A(A, M) \cong M$．便宜上 $\mathrm{Hom}_R(A, M)$ を $D_\infty(A, M)$ で表わせば，

$$(1.2)\quad \begin{array}{ccc} D_\infty(A, M)\ (=\mathrm{Hom}_R(A, M)) \cong \mathrm{Hom}_A(A\otimes A, M) \\ D \longleftrightarrow F \end{array} ;\quad \begin{array}{l} F(\omega)=\omega(D)(1) \\ D(a)=F(1\otimes a) \end{array}$$

これを D_q に制限すれば，

$$(1.3)\quad D_q(A, M) \cong \mathrm{Hom}_A((A\otimes A)/J^{q+1}, M)$$

次に q 次 high order derivation の加群：

$$\mathrm{Der}_q(A, M)=\{D\in D_q(A, M) \mid D(1)=0\} \qquad (q=0, 1, \ldots, \infty)$$

とくに $\mathrm{Der}_0(A, M)=0$，$\mathrm{Der}_\infty(A, M)=\{D\in \mathrm{Hom}_R(A, M) \mid D(1)=0\}$．

また $\mathrm{Der}_1(A, M)$ が通常の derivation の加群である．

(1.1) により

$$(1.4)\quad \mathrm{Der}_\infty(A, M)=\mathrm{Hom}_R(A/R, M)\cong \mathrm{Hom}_A(J, M);\quad \begin{array}{l} F(\omega)=\omega(D)(1) \\ D(a)=F(j_a) \end{array}$$

これを Der_q に制限すれば，

$$(1.5)\quad \mathrm{Der}_q(A, M) \cong \mathrm{Hom}_A(J/J^{q+1}, M)$$

$M=A$ のとき，合成の積について，

$$j_a(D_1D_2) = j_a(D_1)\cdot D_2 + D_1 j_a(D_2)$$

よって $D_p(A, A)\,D_q(A, A)\subset D_{p+q}(A, A)$ で，$D(A, A)=\bigcup_{q<\infty} D_q(A, A)$ は filtered algebra の構造をもつ．

このような扱い方で [2] Chap I の諸結果を導くことについては [3] 参照．ここでは最近の次の結果にのみふれる．

定理 (Kikuchi [4]). 体の拡大 L/K について,

有限次純非分離的 $\Longleftrightarrow$ J nilpotent $\Longleftrightarrow$ $D(L, L) = \mathrm{Hom}_K(L, L)$

証明. $\Rightarrow$ は trivial. 最初の $\Leftarrow$ は体論から容易. 次に $D(L, L) = \mathrm{Hom}(L, L)$ を仮定すれば, (1.2), (1.3) により $\mathrm{Hom}_L(L \otimes L, L) = \bigcup_q \mathrm{Hom}_L(L \otimes L/J^{q+1}, L)$. L が体だから, これは J が nilpotent でなければ不可能.

A が augmented のとき, すなわち多元環準同型 $\varepsilon : A \to R$ があるとき, $\mathfrak{m} = \ker \varepsilon$ とおけば,

$$\mathfrak{m} = \{ i_a = a - \varepsilon(a) \cdot 1 \mid a \in A \}$$

ε を通して R を A-加群と見れば, $f \in \mathrm{Hom}_R(A, R)$ について $\delta_a(f) = f \circ i_a$. よって

$$D_q(A, R) = \mathrm{Hom}_R(A/\mathfrak{m}^{q+1}, R) \tag{1.6}$$

1.2. $\mathrm{Der}(A, V)$ によって両側加群 V への derivation の加群を表わすとき, 次は split exact sequence をなす:

$$0 \to M \to D_\infty(A, M) \to \mathrm{Der}(A, \mathrm{Hom}_R(A, M)) \to 0$$

(1.7)
$$D \mapsto d \ ; \quad d(a) = \delta_a(D)$$

$$\text{splitting} \qquad D \leftarrow d \ ; \quad D(a) = d(a)(1)$$

$$\mathrm{Der}_\infty(A, M) \cong \mathrm{Der}(A, \mathrm{Hom}_R(A, M))$$

これを D_q に制限すれば, 同じ写像で次の split exact sequence が得られる;

$$(1.8)\qquad 0 \longrightarrow M \longrightarrow D_q(A,M) \longrightarrow \mathrm{Der}(A,\ D_{q-1}(A,M)) \longrightarrow 0$$

$$\mathrm{Der}_q(A,M) \cong \mathrm{Der}(A,\ D_{q-1}(A,M))$$

一方，一般に

$$(1.9)\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Der}(A,V) \cong \mathrm{Hom}_{A\otimes A}(J,V) & ; & f(\omega) = \omega(d)(1) \\ d \longleftrightarrow f & & d(a) = f(j_a) \end{array}$$

そこで(1.5), (1.8), (1.9)と周知の自然同型を組み合わせて，次の可換なdiagramが得られる：

$$(1.10)\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Der}_q(A,M) & \approx & \mathrm{Der}(A,\ D_{q-1}(A,M)) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ \mathrm{Hom}_A(J/J^{q+1}, M) & \approx & \mathrm{Hom}_{A\otimes A}(J/J^{q+1},\ \mathrm{Hom}_R(A,M)) \end{array}$$

左上のDと右下のfは，次の簡単な関係で結ばれている：

$$\omega(D) = f(\omega) \qquad (\omega \in J)$$

一般化 1．たとえば有限群の交換子に関する構造分析が群環のdifferential structureという感じのものに関連するように，非可換環の場合にも関心が持たれる．事実，上記の諸事項は，Aが非可換でも，次のように修正することによって，やはり成り立つ．

$J = \ker(A\otimes A^{\circ} \to A)$ （A° はAと逆同型な多元環）

$J^{(q)} =$ $j_{a_1}\cdots j_{a_q}$ $(a_i \in A)$ 全体の生成する左イデアル．

たとえば，$D \in D_2(A,M)$ の条件は，

$$D(abc) - \big(aD(bc) + bD(ac) + cD(ab)\big) + \big(cbD(a) + caD(b) + baD(c)\big) = 0$$

2. 両側加群 $\mathrm{Hom}_R(A, M)$ のかわりに，一般に $\mathrm{Hom}_R(P, M)$ をとれば，$D_q(P, M)$ が定義される．とくに P が有限生成射影的ならば，多くのことが自然に拡張される．たとえば，次の split exact sequence が成立する：

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, M) \to D_q(P, M) \to \mathrm{Der}(A, \mathrm{Der}_{q-1}(P, M)) \longrightarrow 0$$

ただし，$\mathrm{Der}_q(P, M)$ に相当するものは canonical には定義されない．とくに $M = P$ とすれば，これらのことは $\mathrm{Hom}_R(P, P)$ の構造分析に資するところがあろう．

1.3. 以下に用いられる Hopf algebra に関連した用語等については Sweedler [5] 参照．

A を bialgebra[1]，Δ をその comultiplication，ε を counit とする．A の right A-comodule structure から，left A^*-module structure がひきおこされる．$f : A \longrightarrow A$ が right A-comodule map なることと left A^*-module map なることとは同値で，このとき f を左不変と呼ぶ．左不変な f の全体を $\mathrm{Hom}^l(A, A)$ で表わせば，

$$(1.11) \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}^l(A, A) & \cong & A^* \\ f & \longleftrightarrow & \varphi \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{l} \varphi = \varepsilon \circ f \\ f(a) = a\varphi = (\varphi \otimes 1)\Delta(a) \end{array}$$

制限して，

1) 係数環を体 K とする．A^* で A の linear dual を表わす．

$$(1.12)\qquad \begin{aligned} D^{l}_{q}(A,A) &\cong D_{q}(A,K)\\ \mathrm{Der}^{l}_{q}(A,A) &\cong \mathrm{Der}_{q}(A,K)\end{aligned}$$

$\mathfrak{m}=\ker\varepsilon$ が有限生成ならば, $D(A,K)=\bigcup D_{q}(A,K)$ は bialgebra である(乗法は convolution). もし A がさらに Hopf algebra ならば, $D(A,K)$ も Hopf algebra である. 上記の A の left A^{*}-module structure に関し, A は $D(A,K)$-module algebra となし, smash product $A\# D(A,K)$ が定義される.

定理. A が Hopf algebra で, $\mathfrak{m}$ が有限生成のとき,

$$M\otimes D_{q}(A,K)\cong D_{q}(A,M)\,;\quad m\otimes\delta\longmapsto D\,;\quad D(a)=(\delta\cdot a)\,m$$

とくに
$$A\# D(A,K)\cong D(A,A)$$

これは Heyneman-Sweedler [6] §2 の主要結果であるが, そこでは M が algebra で algebra map $A\to B$ を通して A-加群となっている場合が扱われている.

証明. S を A の antipode とするとき, 下記は可換で, Φ, Ψ は多元環同型である:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & J \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & A\otimes A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, shift left, "\Psi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A\otimes\mathfrak{m} \arrow[r, "1\otimes"] & A\otimes A \arrow[r, "1\otimes\varepsilon"] \arrow[u, shift left, "\Phi"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$;\quad \begin{aligned}\Psi(a\otimes b)&=a\,\Delta(b)\\ \Phi(a\otimes b)&=\sum a\,S(b_{(1)})\otimes b_{(2)}\\ (\text{ここに } \Delta b&=\textstyle\sum b_{(1)}\otimes b_{(2)})\end{aligned}$$

よってイデアルの同型

$$A\otimes\mathfrak{m}\cong J\,;\quad \begin{aligned} 1\otimes i_{a} &\longmapsto \sum S(a_{(1)})\,j_{a_{(2)}}\\ \sum a_{(1)}\otimes i_{a_{(2)}} &\longleftarrow\!\shortmid\ j_{a}\end{aligned}$$

がひきおこされる．従ってまた，$A\otimes\mathfrak{m}^{q+1}\cong J^{q+1}$．そこで，

$$M\otimes D_q(A,K)=M\otimes \mathrm{Hom}(A/\mathfrak{m}^{q+1},K)\cong \mathrm{Hom}(A/\mathfrak{m}^{q+1},M)$$
$$\cong \mathrm{Hom}_A(A\otimes A/A\otimes\mathfrak{m}^{q+1},M)\cong \mathrm{Hom}_A(A\otimes A/J^{q+1},M)$$
$$\cong D_q(A,M).$$

§2．高階微分のp-多元環への応用［7］．

2.1．AをR上の（必ずしも可換でない）多元環とし，

$$A[T]_q=A[T]/(T^{q+1}),\quad t=T\ (\mathrm{mod}\ T^{q+1})$$

とおく．BをAの部分多元環とする．linear map の列$D=\{D_1,\dots,D_q\}$で（$D_i: B\longrightarrow A$），

$$D_t: B\to A[T]_q;\ b\longmapsto b+D_1(b)t+\cdots+D_q(b)t^q$$

がR-多元環準同型になるものは higher derivation of rank q（略；q-h.d.）と呼ばれる．Dはまた$R[T]_q$-多元環準同型$B[T]_q\longrightarrow A[T]_q$と見ることもできる．とくに$q$-h.d. $A\longrightarrow A$の全体は乗法群をなす．

$d_i\in A\ (i=1,\dots,q)$について，

$$d_t=1+d_1t+\cdots+d_qt^q$$

による$A[T]_q$の内部自己同型は，q-h.d. $A\longrightarrow A$を定義する．これを$\{d_1,\dots,d_q\}$による inner higher derivation と呼ぶ，

定理．次のいずれかの仮定の下で，任意の h.d. $B\longrightarrow A$は

inner h.d. $A \to A$ に拡張される.

a) B : separable algebra (定義は [8])

b) A : central separable, B ; (left or right) semi-simple (定義は [9]).

特殊な場合が Jacobson [10] で与えられている. また Sweedler [11] では Hopf algebra の観点から, この型の一般的な定理が述べられている.

2.2 Kを標数$p(\neq 0)$の体, Aをその上の central separable algebra とし, K上の純非分離的拡大

$$L = K(u), \quad u^{p^n} = \tau \in K$$

を極大可換部分環として含むものとする. いわゆる p-algebra の考察において, このような場合が基本的である. Schmid と Witt は次の型の標準形に到達した [12] :

一般に可換環Xの長さnの Witt vector の加法群を$W_n(X)$で表わし,

$$\wp(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0^p, \dots, x_{n-1}^p) - (x_0, \dots, x_{n-1})$$

とおく. また $\underline{1} = (1, 0, \dots, 0)$ とする.

$A = (\tau, \beta]$ $(\tau \in K^*, \beta \in W_n(K))$: 次によって定義される$K$上$p^{2n}$次元の central separable algebra を表わす:

生成元：$u, b_0, \ldots, b_{n-1}$

関　係：b_i 同志は可換，$u^{-1}(b_0,\ldots,b_{n-1})u = (b_0,\ldots,b_{n-1}) + \underline{1}$

$u^{p^n} = \tau$，$\wp(b_0,\ldots,b_{n-1}) = \beta$

A は $K(u)$，$K(b_0,\ldots,b_{n-1}) = K(\frac{1}{\wp}\beta)$ を極大可換部分環にもつ．後者は p^n 次の巡回拡大の標準形であり，その Galois 群の生成元が A において u による内部自己同型に拡張されることを，上記の関係は意味している．

$(\tau, \beta]$ は K の乗法構造と加法構造の相互性を表現するものであるが，それでは $K(u)$ を主体とするとき，$K(\frac{1}{\wp}\beta)$ は何を意味するか？ $K(u)$ は純非分離的で，高階微分によって統制されるから，$K(u)$ の高階微分を A で inner 化することから $K(\frac{1}{\wp}\beta)$ が産み出されると期待してよいであろう．事実，exponent 1 の場合には，微分の inner 化が種々の機会に利用されている．Exponent ≥ 2 の場合，実用的には帰納法的処理で十分なことが多いであろうが，この辺の機構を少し分析してみたい．

$n=1$．$D(u) = u$ で定義される微分 $D: L \longrightarrow L$ が，$b \in A$ による A の内部微分に拡張されれば，$b^p - b = \beta \in K$．このとき，$A \cong (\tau, \beta]$．

$n=2$．L の p-h.d. $D = \{D_1, \ldots, D_p\}$ を次の条件で定義する：

$$D_i(u) = \frac{1}{i!}u \quad (i=1,\dots,p-1), \quad D_p(u) = 0$$

このとき，$D_i = \frac{1}{i!}D_1^i \quad (i=1,\dots,p-1)$．$D$ を inner 化する $\{d_1,\dots,d_p\}$ として，$d_i = \frac{1}{i!}d_1^i$ をみたすものがとれる．そのとき，

$$(2.1) \quad u^{-1}d_1u = d_1 + 1$$

$$(2.2) \quad u^{-1}d_pu = d_p + \sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i!(p-i)!}d_1^i$$

適当な修正により，

$$d_1^p - d_1 = \beta_0 \in K, \quad d_1d_p = d_pd_1$$

をみたすようにできる．そのとき，

$$\delta(d_1, d_p) = (\beta_0, \beta_1) \in W_2(K)$$

よって，$A \cong (\tau / \beta_0, \beta_1]$．

2.3 上記 $n=1,2$ の場合は，いわば巡回的 Galois 群の canonical generator を定めて，それを inner 化することに相当する．$n \geq 3$ の場合，これを具体的に遂行するのは技術的に困難である．そこで Galois 群（の群環）に相当するものとして，一種の Hopf algebra を構成する．

集合 $\{0,1,\dots,p-1\}$ を $[p-1]$ で表わし，加法

$$e \dot{+} f = \begin{cases} e+f & (e+f < p) \\ e+f-(p-1) & (e+f \geq p) \end{cases}$$

によって semi group にする．直積 $[p-1]^n$ の元を $e=(e_0,\dots,e_{n-1})$

で表わす。Pairing

$$[p-1]^n \times W_n(\mathbb{F}_p) \to \mathbb{F}_p \,;\quad (e, \alpha) \mapsto \alpha^e = \alpha_0^{e_0} \cdots \alpha_{n-1}^{e_{n-1}}$$

は，次の"指数法則"をみたす：

$$\alpha^e \alpha^f = \alpha^{e \dot{+} f}$$

素体 $\mathbb{F}_p$ 上の Hopf algebra $\mathcal{D}_0$ を次によって定義する。

algebra structure of $\mathcal{D}_0 = \mathbb{F}_p[T_0, \ldots, T_{n-1}]/(T_0^p - T_0, \ldots, T_{n-1}^p - T_{n-1})$

basis $\{ \delta^e = T_0^{e_0} \cdots T_{n-1}^{e_{n-1}} \mid e \in [p-1]^n \}$

乗法法則 $\delta^e \delta^f = \delta^{e \dot{+} f}$

coalgebra structure

augmentation : $\varepsilon(\delta^e) = \begin{cases} 1 & (e = 0) \\ 0 & (e \neq 0) \end{cases}$

comultiplication は dual を用いて記述する。すなわち，$\mathcal{D}_0$ の dual V の basis $\{ v^\alpha \mid \alpha \in W_n(\mathbb{F}_p) \}$ を

$$\langle \delta^e, v^\alpha \rangle = \alpha^e$$

で定める。V の coalgebra structure は $\Delta v^\alpha = v^\alpha \otimes v^\alpha$ をみたしているが，$v^\alpha v^\beta = v^{\alpha+\beta}$ によって乗法を定義して Hopf algebra にする。その dual として，$\mathcal{D}_0$ の comultiplication Δ が定まる。すなわち，

$$\langle \Delta \delta^e, v^\alpha \otimes v^\beta \rangle = (\alpha + \beta)^e$$

antipode : $S(\delta^e) = (-1)^{\Sigma e_i} \delta^e$

以上により $\mathcal{D}_0$ は p^n 次元の Hopf algebra をなす。$\mathcal{D}_0 \otimes K$ を $\mathcal{D}$ で表わす。

対応 $i \longleftrightarrow \underline{i} = i\cdot\underline{1}$ により，L の basis $\{u^i \mid 0 \le i < p^n\}$ を $\{u^\alpha \mid \alpha \in W_n(\mathbb{F}_p)\}$ で表わせば，

$$u^\alpha u^\beta = \tau^{(\alpha,\beta)} u^{\alpha+\beta} \quad , \quad \left((\alpha,\beta) = \begin{cases} 0 & (\alpha+\beta < p^n) \\ 1 & (\alpha+\beta \ge p^n) \end{cases} \right)$$

$\mathcal{D}$ の L への作用を

$$\delta^e(u^\alpha) = \alpha^e u^\alpha = \langle \delta^e, v^\alpha \rangle u^\alpha$$

で定義すれば，L は $\mathcal{D}$-加群になる．また

$$\delta^e(u^\alpha u^\beta) = \tau^{(\alpha,\beta)}(\alpha+\beta)^e u^{\alpha+\beta} = (\alpha+\beta)^e u^\alpha u^\beta$$
$$= \mu\left[\langle \Delta\delta^e, v^\alpha \otimes v^\beta \rangle u^\alpha \otimes u^\beta\right] = \mu\left[\Delta\delta^e(u^\alpha \otimes u^\beta)\right]$$

により，module algebra である．明らかに次も成り立つ：

(2. 3)　$[\mathcal{D} : K] = [L : K]$

(2. 4)　$L^{\mathcal{D}} = \{a \in L \mid \delta(a) = \varepsilon(\delta)a,\ {}^\forall\delta \in \mathcal{D}\} = K$

また，

(2. 5)　$(u^{-\alpha}\delta^e u^\alpha)(u^\beta) = (\alpha+\beta)^e u^\beta$

§2.2 の $n = 2$ のときに用いた D_1, D_p は，$e = (1,0)$, $(0,1)$ に対する δ^e である．また (2. 5) で $\alpha = 1$ としたものが (2. 1), (2. 2) に対応し，然るべき inner 化によってこれに転化するのであった．

一般に H を有限次元の Hopf algebra とし，K の有限次拡大体 L が H-module algebra になっているとする．そのとき次の 3 条件は同値で ([5], [13])，これが成り立つとき H を L/K の Galois Hopf algebra と呼ぶ：

a) $[H:K]=[L:K]$, $L^H=K$.

b) $L\# H \to \mathrm{Hom}(L,L)$; $(a\# h)(x)=a\,h(x)$ が多元環同型.

c) $L\otimes L \to L\otimes H^*$; $a\otimes b \mapsto a\,\omega(b)$ が多元環同型.

ここに $\omega : L \to L\otimes H^*$ は H の作用 $H\otimes L \to L$ を転化させた H^* の co-作用を表わす. L が normal separable のとき, $H^*=K^n$ についてこれを実現させるものが Galois 群の群環に他ならない. 現在の場合では

$$L\otimes L \cong L\otimes H^*;\quad H^* \cong K[T]/(T-u)^{p^n}$$

ここで $H^* \cong K[X]/(X^{p^n})$ と見て, $\{X^i\}$ の dual basis を $\{D_i\}$ とすれば, divided powers の方式で,

$$D_iD_j=\binom{i+j}{i}D_{i+j},\quad \Delta D_n=\sum_{k=0}^{n} D_k\otimes D_{n-k}$$

により, "加法群型" の Galois Hopf algebra が得られる. しかしこれは上述の Witt 群的構造と結びつけるのに適当な構成ではない.

H^* はまた $K[S]/(S^{p^n}-1)$ とも同型である. 後者は位数 p^n の巡回群 ($\cong W_n(\mathbb{F}_p)$) の群環であり, その見方で Hopf algebra をなす. その dual は "乗法群型" の Galois Hopf algebra を与え, これを $W_n(\mathbb{F}_p)$ の加法と結びつけて記述したものが上述の $\mathcal{D}$ である. これは上に加法群型と呼んだものと構造を異にするものであるから, 純非分離的拡大には Chase-Sweedler [13] の意味の Galois 理論で実質

的に異なるものが，少くも２種類存在し得ることになる．

引 用 文 献

1. H. Osborn, Modules of differentials I, Math. Ann. 170 (1967) 221–244

2. Y. Nakai, High order derivations I, Osaka J Math. (1970)

3. A. Hattori, On high order derivations from the view-point of two-sided modules, Sci. Pap Coll. Gen. Ed. Univ. of Tokyo 20 (1970), 1–11

4. T. Kikuchi, Some remarks on high order derivations, 近刊

5. M. E. Sweedler, Hopf Algebras, Benjamin, 1969

6. R. G. Heyneman and M. E. Sweedler, Affine Hopf algebras, I, J. of Alg. 13 (1969), 192–241

7. A. Hattori, An application of inner-extension of higher derivations to p-algebras, 近刊.

8. M. Auslander and O. Goldman, The Brauer group of a commutative ring, Trans. AMS. 99 (1960) 367–409.

9. A. Hattori, Semi simple algebras over a commutative ring, J. Math. Soc. Japan 15 (1963), 404–419

10. N. Jacobson, Generation of separable and central simple algebras, J. Math. pures appl. 36 (1957), 217-227

11. M. E. Sweedler, Cohomology of algebras over Hopf algebras, Trans. AMS 133 (1968) 205-239

12. E. Witt, Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grad p^n, Crelles J 176 (1937), 31-44

13. S. U. Chase and M. E. Sweedler, Hopf algebras and Galois theory, Springer Lecture Notes 97, 1969.