

## Burgers 乱流におけるエネルギー・スペクトルの定常性

京大・理 巽 友正  
京大・数研 川 尊 琢 治

### § 1. 序

乱流理論における一つの近似として 4 次キムラント打ち切り近似を採用した場合、エネルギー・スペクトル  $E(k)$  が時間とともに変化していく過程で、乱れの初期 Reynolds 数があまり小さくない場合には、ある波数領域で  $E(k)$  が負の値をとることが、いくつかの数値計算例によって示されている (Ogura, 1963; Tatum, 1968)。エネルギー・スペクトルが負値をとるということは物理的に許されないことであって、上記の結果は 4 次キムラント打ち切り近似の破綻を意味するものと考えられる。ところで、4 次キムラント打ち切り近似は乱れの特性能関数のキムラント展開 (対能関数の Taylor 展開) の中 1 近似であり、乱れが弱い (Reynolds 数が小さい) 場合からの擾動に対応していることを考えあわせると、Reynolds 数が大きくなったときに、このような破綻が生じることはあり得ることと考えられる。すなわち、このような近似の性質からすれば、4 次キムラント打ち切り近似は Reynolds 数が

低いときにはよい結果を与えるが，逆に Reynolds 数が高くなってくると，いつかは負エネルギー発生のような破綻を生ずるものと思われる。

一方，たとえば Burgers のモデル乱流においてエネルギー・スペクトルの初期形を  $0.04/(0.04 + k^2)$  と選んだ場合，4次キュムラント打ち切り近似による計算が，他の形の初期条件を用いた場合よりも可成り長い時間にわたって，エネルギー・スペクトルに負値を生じないという報告がある (Jeng et al., 1966; Meecham and Su, 1969)。

以上のことから，4次キュムラント打ち切り近似が普遍的に有効であるのは Reynolds 数の低い場合に限られるが，ある種の初期条件については高い Reynolds 数の範囲においてもよい結果を与え，負エネルギーの発生も起らないことが期待される。高い Reynolds 数で有効な解になりうるものとしては，非粘性の極限で得られる漸近解 (Tatsumi, 1960, 1962) が有力な候補として考えられる。もし，初期条件としてこのような解に近い函数形をとったときに，どのような結果が得られるかを調べてみるのは興味深いことと思われる。

この報告では，Burgers モデル乱流について， $R \rightarrow \infty$  の極限での解である  $k^{-2}$ ， $k^{-1}$  スペクトルに近い函数形を含む種々の初期条件を与えて，4次キュムラント打ち切り方程式を

数値的に解いて、エネルギー・スペクトルの時間的变化を追跡することを試みる。それらの結果を比較することにより、エネルギー・スペクトルの時間変化の初期形への依存性を調べ、非粘性解である  $K^{-2}$ ,  $K^{-1}$  スペクトルに近い初期形が果して高 Reynolds 数の範囲において定常性を示すかどうかを吟味する。

## §2. 基礎方程式

一次元 Burgers モデル乱流に対する 4 次キムラント打ち切り近似方程式は次のように与えられる (Reid, 1956; Kawahara, 1968):

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + 2\nu K^2 \right\} E(K, t) = -K \int_{-\infty}^{\infty} W(K, K', t) dK', \quad (1)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + 2\nu(K^2 + KK' + K'^2) \right\} W(K, K', t)$$

$$= (K+K')E(K, t)E(K', t) - KE(K', t)E(K+K', t)$$

$$- K'E(K, t)E(K+K', t), \quad (2)$$

ここに  $E$  はエネルギー・スペクトル函数,  $W$  はエネルギー伝達函数,  $t$  は時間,  $\nu$  は動粘性率である。

速度  $u(x, t)$  と  $E$  との関係は

$$\langle u(x, t)u(x+r, t) \rangle = 2 \int_0^{\infty} E(K, t) e^{iKr} dK, \quad (3)$$

で与えられる。ただし  $\langle \rangle$  は確率平均を表わす。

いま初期時刻  $t=0$  において、流体の単位質量当りの乱れのエネルギーを  $\frac{1}{2}\langle u^2 \rangle_0$ 、乱れの代表的な波数を  $K_0$  とすれば、すべての量はつぎのように無次元化できる。

$$\text{時間: } \tau = \nu K_0^2 t,$$

$$\text{波数: } S = k/K_0,$$

$$\text{エネルギー・スペクトル: } E(S, \tau) = E(k, t)/E_0,$$

$$E_0 = (\frac{1}{2}\langle u^2 \rangle_0)/K_0,$$

$$\text{エネルギー・伝達函数: } W(S, S', \tau) = W(k, k', t) K_0^{\frac{1}{2}}/E_0^{\frac{3}{2}},$$

$$\text{Reynolds 数: } R = (\frac{1}{2}\langle u^2 \rangle_0)^{\frac{1}{2}}/\nu K_0$$

$$= E_0^{\frac{1}{2}}/(\nu K_0^{\frac{1}{2}}).$$

(4)

このとき、方程式 (1), (2) はそれぞれつぎのように無次元化される。

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} + 2S^2 \right\} E(S, \tau) = -R S \int_{-\infty}^{\infty} W(S, S', \tau) dS', \quad (5)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} + 2(S^2 + SS' + S'^2) \right\} W(S, S', \tau)$$

$$= R \left\{ (S+S') E(S, \tau) E(S', \tau) \right.$$

$$- S E(S', \tau) E(S+S', \tau)$$

$$\left. - S' E(S, \tau) E(S+S', \tau) \right\}. \quad (6)$$

とくに、 $\tau = 0$  のときエネルギー伝達がない場合、すなわち  $W(s, s', 0) = 0$  とおける場合には、(5), (6) 式はつきのように積分できる。

$$E(s, \tau) = E(s, 0) e^{-2s^2\tau}$$

$$+ \frac{R^2}{2} \int_0^\tau d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} ds' \left[ \exp\{-2(s^2 + ss' + s'^2)(\tau - \tau')\} \right.$$

$$\left. - \exp\{-2s^2(\tau - \tau')\} \right] \frac{1}{ss' + s'^2} \left\{ s(s+s')E(s, \tau')E(s', \tau') \right.$$

$$\left. - s^2E(s', \tau')E(s+s', \tau') - ss'E(s, \tau')E(s+s', \tau') \right\}, \quad (7)$$

方程式系 (5), (6), または (7) 式が以下の議論の基礎式である。

### § 3. 定常エネルギー・スペクトル

Navier-Stokes 方程式に従う 3次元等方性乱流では、4次キュムラント打ち切り近似のもとで、乱れの Reynolds 数が無限大の極限 (非粘性) で、 $E(k) \propto k^{-2}$  または  $k^{-1}$  の形の定常解が存在することが示されている (Tatsumi, 1960, 1962)。

Burgers 乱流の場合にも、全く同様な手続きによって、 $R \rightarrow \infty$  の極限での定常解が得られる。 $R$  が大きいときには (7) 式の非線型項が残りの項に優越する。いま、小さい  $\tau$  の値 ( $\tau \ll 1$ )

に対して  $E$  が定常であると仮定すると、(7) 式は

$$-\frac{R^2\tau^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} ds' \left\{ s(s+s')E(s)E(s') - s^2E(s')E(s+s') \right.$$

$$-SS'E(S)E(S+S')] = 0 \quad (8)$$

となる。一斉、大きい $\tau$ の値( $\tau \gg 1$ )に対し $E$ が定常であると仮定すると、(7)式は

$$-\frac{R^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} ds' \frac{1}{S^2(S^2+SS'+S'^2)} [S(S+S')E(S)E(S') - S^2E(S')E(S+S') - SS'E(S)E(S+S')] = 0 \quad (9)$$

となる。

$E(S)$ を $S$ のべき関数と仮定すれば、(8)および(9)式が“つき”の定常解を持つことが示される：

$$\tau \ll 1 \text{ のとき } E(S) = A \text{ または } AS^{-2}, \quad (10)$$

$$\tau \gg 1 \text{ のとき } E(S) = A \text{ または } AS^{-1}, \quad (11)$$

ただし、 $A$ は定数。

解 $E(S) = A$ は全波数空間にわたってのエネルギーの等分配を表わし、解 $E(S) \propto S^{-2}$ および $E(S) \propto S^{-1}$ は波数とともに単調に減少するエネルギー分布を表わす。これらの解はいずれも無限大のエネルギーを与えるが、これは有限Reynolds数において有限のエネルギーをもつスペクトルの $R \rightarrow \infty$ での極限形であると解釈すべきである(Tatsumi, 1960)。数値計算を実行する場合には、初期スペクトルとして無限大のエネルギーをもつものは採用できないので、スペクトル $S^{-2}$ または $S^{-1}$ は、全エネルギーが有限となるような函数形で近

似する必要がある。

#### §4. 数値積分

数値積分の便宜上、無次元時間として $\tau$ の代りに  $R\tau = (E_0 k_0^3)^{\frac{1}{2}} \tau$  をとり、さらに無次元の独立変数、従属変数をつぎのように離散的な値で代表させる。

$$\left. \begin{aligned} R\tau &= T\Delta(R\tau), \quad T = 0, 1, 2, \dots; \\ S &= I\Delta S, \quad I = 0, 1, 2, \dots, N; \\ S' &= J\Delta S, \quad J = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N; \\ E(S, R\tau) &= E(I, T), \\ W(S, S', R\tau) &= W(I, J, T). \end{aligned} \right\} (12)$$

ここに、 $\Delta(R\tau)$ ,  $\Delta S$  は時間および空間に関する増分を表わす。(5)式あるいは(7)式右辺の無限区間の積分は、十分大きい波数  $S = N\Delta S$  で打切ることにする。以上のような無次元化を行なうと(5), (6)式はつぎの差分形に書き直せる:

$$\begin{aligned} E(I, T+1) &= \{1 - 2\mu I^2\} E(I, T) \\ &\quad - \sigma I \sum_{J=-N}^N W(I, J, T), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} W(I, J, T+1) &= \{1 - 2\mu(I^2 + IJ + J^2)\} W(I, J, T) \\ &\quad + \lambda \{ (I+J)E(I, T)E(J, T) - IE(J, T)E(I+J, T) \\ &\quad - JE(I, T)E(I+J, T) \}, \end{aligned} \quad (14)$$

ここに

$$\mu = \frac{1}{R} \Delta(R\tau)(\Delta S)^2 = \Delta\tau(\Delta S)^2 = \nu \Delta t (\Delta K)^2,$$

$$\sigma = \Delta(R\tau)(\Delta S)^2 = (E_0/K_0)^{\frac{1}{2}} \Delta t (\Delta K)^2,$$

$$\lambda = \Delta(R\tau)\Delta S = (E_0 K_0)^{\frac{1}{2}} \Delta t \Delta K,$$

である。これらの無次元パラメータを用いて、乱れの Reynolds 数はつきのように表わされる:

$$R = E_0^{\frac{1}{2}} / (\nu K_0^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{\sigma \lambda \Delta S} / \mu. \quad (15)$$

$E$  および  $W$  に対する初期条件が与えられれば、以後の時刻における  $E$ ,  $W$  の値は差分方程式 (13), (14) を解くことにより計算できる。初期条件として、 $E$  に対しては種々の値をとるが  $W$  は簡単のために初期値をつねに 0 ととることにする。

前節で得られた定常解  $K^{-2}$  または  $K^{-1}$  に近い初期値を与えたとき、スペクトルの函数形が時間的にどの程度不変であるかを調べるのが我々の目的である。そのために、無次元エネルギー・スペクトル函数の初期形  $E(s, 0)$  としては次のようなものをとることにする:

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad & \frac{1}{1 + (\alpha s)^n}, \quad \alpha = \frac{\pi}{n \sin(\pi/n)}, \\ \text{(ii)} \quad & \frac{1}{\sqrt{1 + (\alpha s)^{2n}}}, \quad \alpha = \frac{\Gamma(\frac{1}{2n}) \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n})}{2n \sqrt{\pi}}, \end{aligned} \right\} (16)$$

$$\begin{array}{l}
 \text{(iii)} \left\{ \begin{array}{l} 1, \quad 0 < s < 1/\alpha \text{ のとき,} \\ (\alpha s)^{-n} \quad 1/\alpha < s \text{ のとき.} \end{array} \right. \quad \alpha = \frac{n}{n-1}, \\
 \text{(iv)} \exp\{-(\alpha s)^2\}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
 \end{array}$$

ここに、 $\alpha$  は規格化のための定数で、

$$\int_0^{\infty} E(s, 0) ds = 1,$$

すなわち

$$\frac{1}{2} \langle u \rangle_0^2 = \int_0^{\infty} E(k, 0) dk = E_0 k_0.$$

(17)

となるようにとってある。また、 $\Gamma$  はガンマ函数を表わす。初期形 (i), (ii), (iii) は  $s^{-n}$  スペクトルを近似し、しかも有限な全エネルギーをもつスペクトルで、 $s > 1$  の領域では、(iii), (ii), (i) の順に  $s^{-n}$  により近い函数値を与える。(iv) はこれまでしばしば数値計算に用いられた Gauss 型の初期スペクトルである。

初期形 (i), (ii), (iii) における  $n$  の値としては、 $n = 1.1, 1.5, 2, 3, 4$  をとる。 $n = 1$  の場合はスペクトルの定常性に関連してとくに興味ある場合であるが、このとき  $\alpha = \infty$  となるので、それを避けるため  $n = 1.1$  ととる。

ここで、とくに注意すべきことは、初期スペクトルおよび

時間の無次元化ということである。いろいろな初期スペクトルの形によってスペクトルの時間的变化がどう異なるかを比較しようとするとき、これを次元のある時間で表わしたのでは、必ずしもスペクトルの函数形の違いによる相異を表わさないのである。

たとえば、Jeng その他 (1966) は、初期スペクトルとして  $E(k, 0) = 0.04 / (0.04 + k^2)$ ,  $1 / (1 + k^2)$ ,  $\frac{1}{2} / (\frac{1}{2} + k^2)$ ,  $1 / (1 + k^3)$ ,  $\frac{1}{2} / (\frac{1}{2} + k^3)$ ,  $\exp(-k^2)$  をとり、これらのうち最初のスペクトルが他のもの比べて際立って高い定常性をもつことを示した。しかし、最初のスペクトルは第2, 第3のスペクトルとは無次元形においては全く同一であり、唯一の相違は  $k_0$  の値が第2のもの0.2倍であることだけである。したがって、これらの3つのスペクトルは、無次元時間  $\tau = \nu k_0^2 t$  あるいは  $R\tau = (E_0 k_0^3)^{\frac{1}{2}} t$  の上では、同一の  $R$  に対しては、全く同じ時間的变化を示さなければならぬ。しかし、これを次元のある時間  $t$  で表わした場合、同一の  $\tau$  あるいは  $R\tau$  の値に対して、 $k_0$  の値が小さいものほどより大きい  $t$  の値が対応する。すなわち、 $t$  の上では第1のスペクトルは第2, 第3のスペクトルに比べてより遅い時間的变化を示す。しかし、エネルギー・スペクトルの初期形の如何にかかわらず、エネルギー分布がより低

波数領域に移るにつれて時間的变化が遅くなることはいわば周知の事実であり驚くには当らない。Jeng その他の結果はこの意味では何ら中1のスペクトル特有のものではない。より明確に言えば、初期スペクトルとして  $E(k, 0) = \varepsilon / (\varepsilon + k^2)$  ととった場合、その有次元時間  $t$  上での変化は  $\varepsilon \rightarrow 0$  とともに限りなく遅くなることは容易に確かめられる。われわれがこの論文で調べようとしているのはこのような効果  $\varepsilon$  とり除いた、純粹に初期スペクトルの“函数形”の相異による時間的ふるまいの相異の比較であり、したがって、そのためには無次元時間であるいは  $Rt$  上での変化を調べなければならぬのである。

### §5. 数値計算の結果と検討

われわれの数値計算の目的は、はじめにも述べたように、エネルギー・スペクトル  $E(k) \propto k^{-2}$ ,  $k^{-1}$  の定常性の検証にある。そのため、(16)式で与えられるさまざまな初期スペクトルに対して、エネルギー・スペクトルの函数形が時間とともにどのように変化するかを数値的に追跡する。その結果は、実行した数値計算の範囲では、つぎのようにまとめられるように思われる。

(a) スペクトルの時間的变化は、Gauss 型 (iv) の場合(図1参照)が、他の代数函数型 (i), (ii), (iii) のどれよりも大きい。

(b) 代数函数型のうちでは, (i), (ii), (iii) のそれぞれの系列の中で  $n=2$  に対応するものが, 他の値のもの ( $n=1.5, 3, 4$ ) に比べてより大きな定常性を示している(系列(ii)については図3, 4, 5参照。他系列については省略。)

(c) 代数函数型のうちで,  $n=1.1$  に対応するものの定常性は, 小波数領域においていちじるしく認められる(系列(ii)については図2, 3, 4参照。他系列については省略。)

(d)  $n=2$  については, 定常性は系列(iii), (ii), (i) の順に良く保たれている。また,  $n=1.1$  についても同様の傾向が認められる。

以上の結果からつぎのような推論ができるように思われる。

(a) の結果は, Gauss型の函数が, Reynolds数が大きいときのエネルギー・スペクトル方程式の解になっていないことの反映である。

(b) および(d)の結果は, スペクトルの函数形が  $E(k) \propto k^{-2}$  に接近していればいさほど, 定常性がよりよく保たれることを示しているが, これは  $k^{-2}$  スペクトルが孤立解ではなく, 有限エネルギーをもつスペクトルの極限として到達しうる解であることの有力な証拠を与えるものと思われる。

(c) および(d)の結果から,  $E(k) \propto k^{-1}$  スペクトルの定常性についても  $k^{-2}$  スペクトルと同様の推論ができるが, その

程度は  $k^{-2}$  の場合ほど強くはない。このことは、数値計算に用いた指数が厳密に  $n=1$  ではなく  $n=1.1$  であること、および積分範囲の  $I=40$  における打ち切りの誤差が、 $n$  の値が小さいほど（スペクトルの  $k \rightarrow \infty$  での減少がゆるやかであるほど）大きくなることなどによるものであり、この種の数値計算ではこれ以上決定的なことは言えないように思われる。

最後に、各初期形について、エネルギー・スペクトルが最初に負値をとる時間  $\tau_*$  または  $R\tau_*$  を比較してみよう。これらの値はスペクトルの定常性の一つの目安を与えるものと考えられる。各初期形に対して計算された  $R\tau_* = (E_0 k_0^3)^{\frac{1}{2}} \tau_*$  の値は表 1. に示すとおりである。ただし、 $R=100$  としている。

$E(S,0)$ $n$	$\frac{1}{1+(\alpha S)^n}$	$\frac{1}{\sqrt{1+(\alpha S)^{2n}}}$	$\begin{cases} 1, & 0 < S < \frac{1}{\alpha} \\ (\alpha S)^{-1}, & S > \frac{1}{\alpha} \end{cases}$	$\exp[-(\alpha S)^2]$
1.1	4.58	5.04	6.38	3.46
1.5	3.22	4.30	5.99	
2.0	3.66	4.88	5.27	
3.0	3.88	4.20	4.18	
4.0	3.84	3.96	3.68	

表 1. エネルギー・スペクトルに負値が現われる時刻  $R\tau_* = (E_0 k_0^3)^{\frac{1}{2}} \tau_*$  .

表での  $RT_*$  の値を比較する限りでは、エネルギー・スペクトル  
の不変性は  $K^2, K^1$  に近いものに対してとくに顕著であるとは  
言えない。しかし、少くとも次のようなことはこの表から  
よめとれるように思われる。初期条件(iv)に対する  $RT_*$  は  
他のものに対するよりも短い。また、 $n=2, 1.5, 1.1$  等  
に対する  $RT_*$  の値は大體(i), (ii), (iii)の順に大きくなって  
いる。すなわち  $K^2, K^1$  により近い函数形に対しては  $RT_*$   
はより大きくなり、逆に  $K^2, K^1$  から函数形がずれるほどよ  
り早い時間で負値が生ずる傾向がある。

### 引用文献

- (1) Y.Ogura: J.Fluid Mech. 16 (1963) 33.
- (2) T.Tatsumi: 未印刷 (1968).
- (3) T.Tatsumi: Proc.Roy.Soc.(London) A239 (1957) 16,  
Proc.IX-th Internat'l.Congr.Appl.Math.(1957) 396.
- (4) I.Proudman and W.H.Reid: Phil.Trans. A247 (1954) 163.
- (5) W.H.Reid: Appl.Sci.Res. A6 (1956) 85.
- (6) T.Kawahara: J.Phys.Soc.Japan 25 (1968) 892.
- (7) D.T.Jeng, R.Foerster, S.Haaland and W.C.Meecham:  
Phys.Fluids 9 (1966) 2114.
- (8) W.C.Meecham and M.Y.Su: Phys.Fluids 12 (1969) 1582.
- (9) T.Tatsumi: Rev.mod.Phys. 32 (1960) 807.
- (10) 巽 友正 乱流(1962) 槇書店.

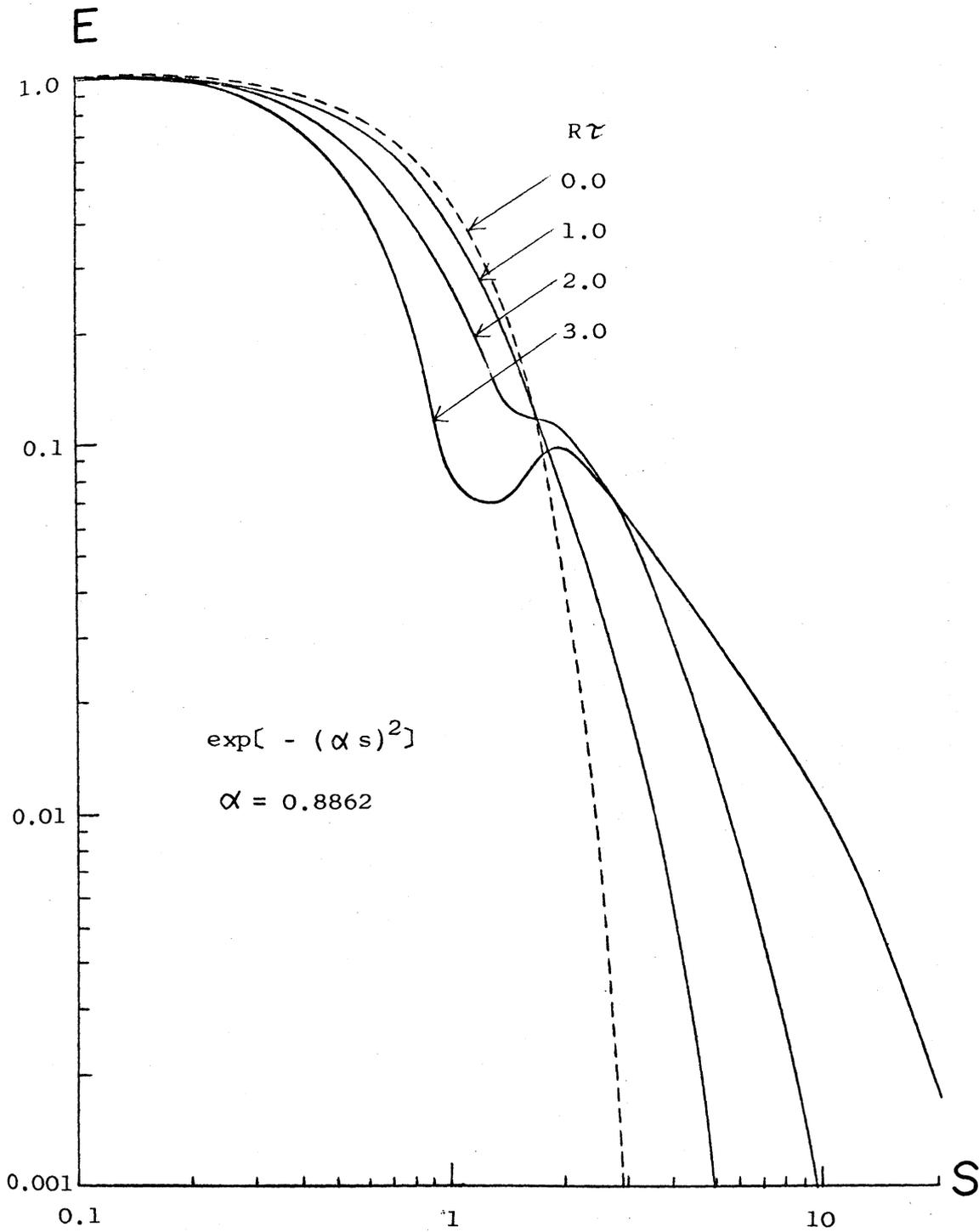


図1. エネルギー・スペクトルの時間変化。  
 $R = 100$ . 両対数表示.

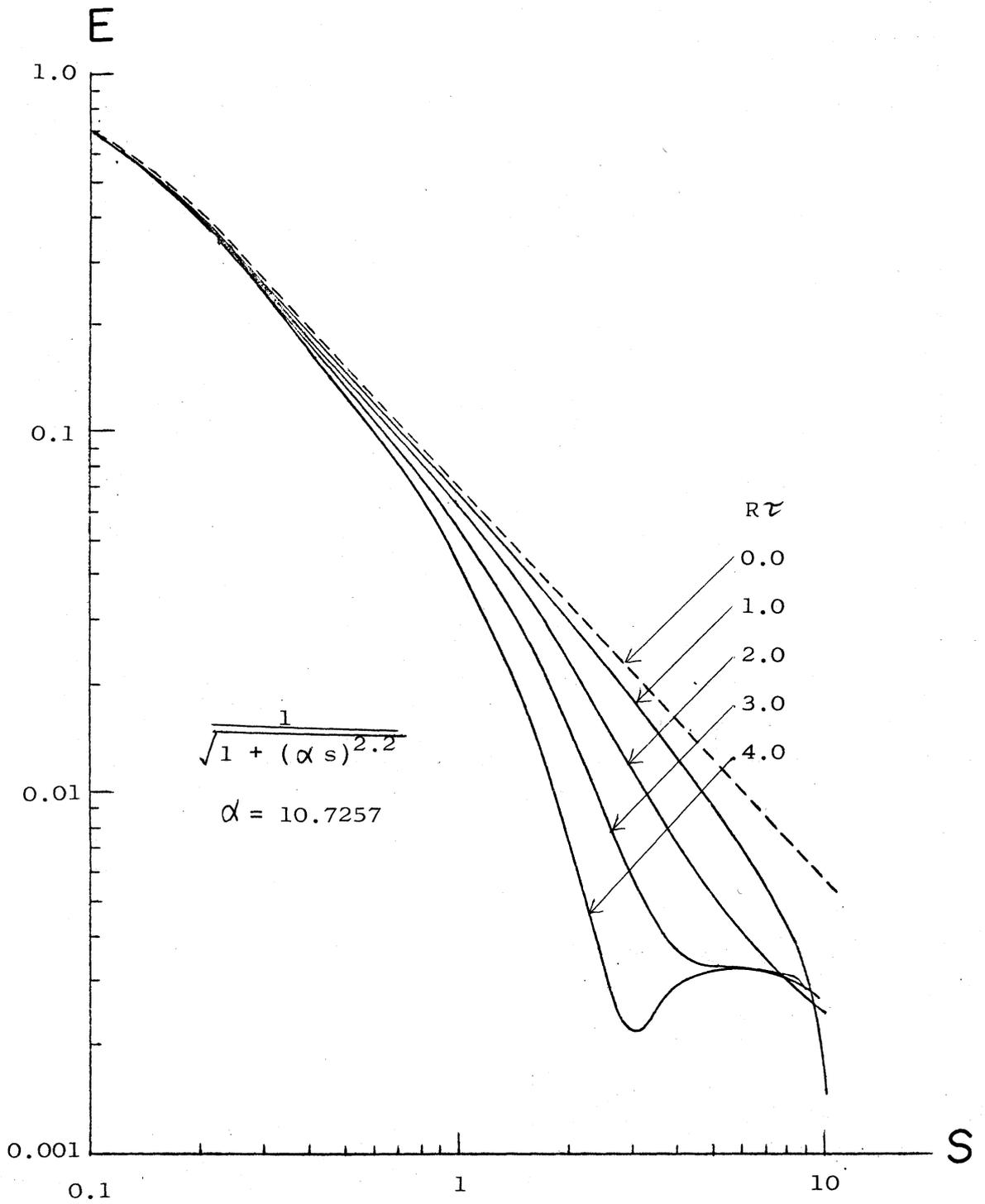


图 2.

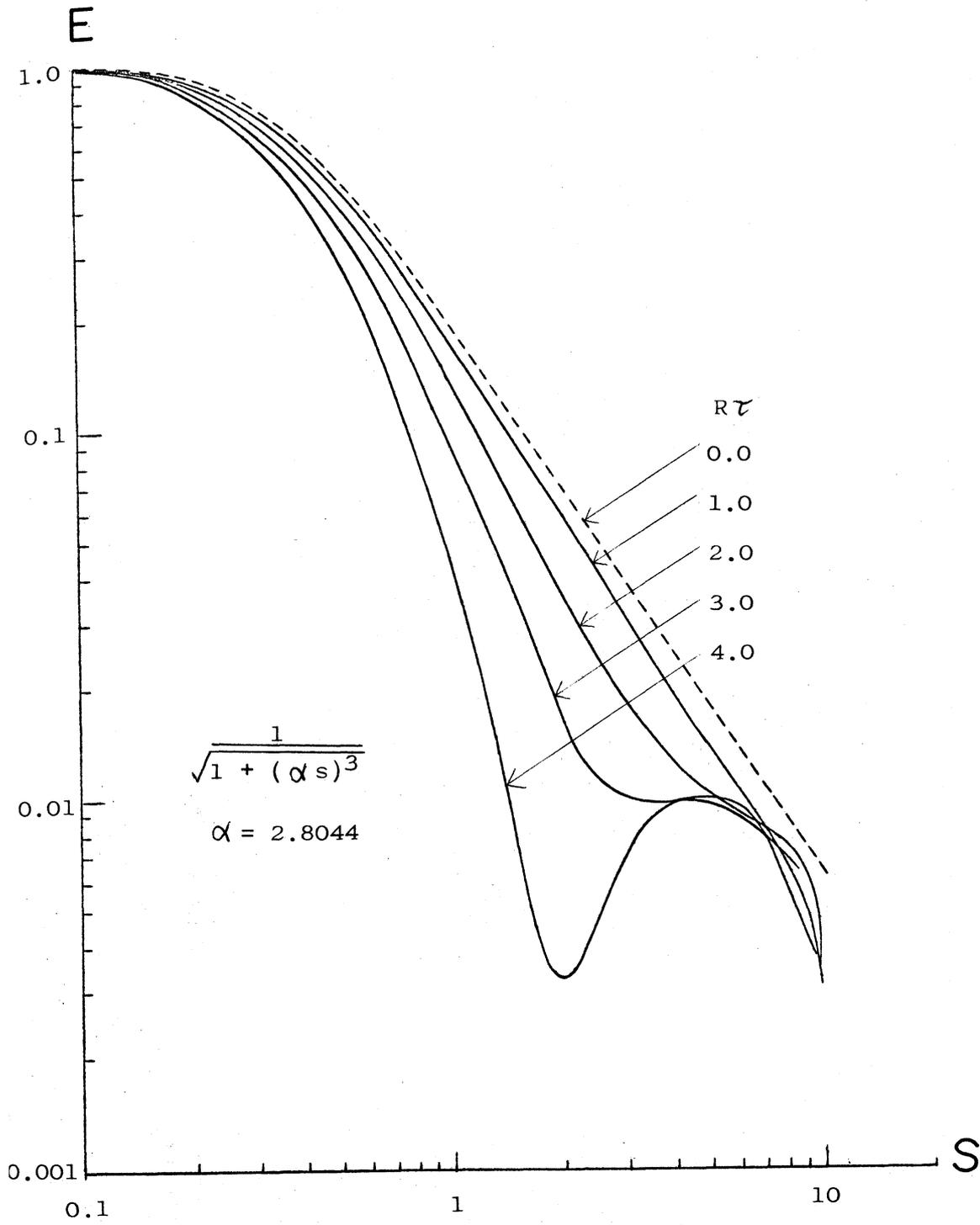


图 3.

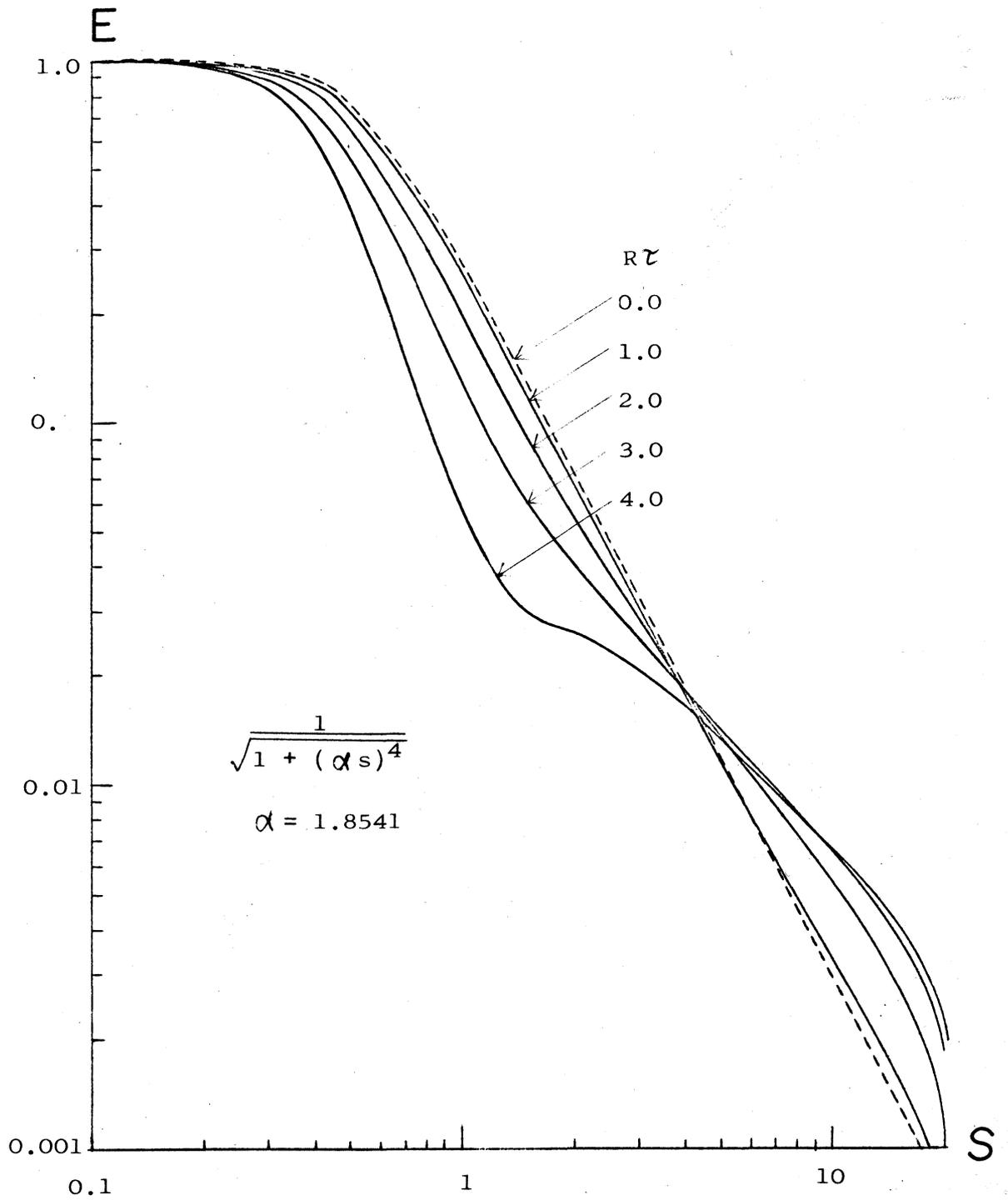


图 4.

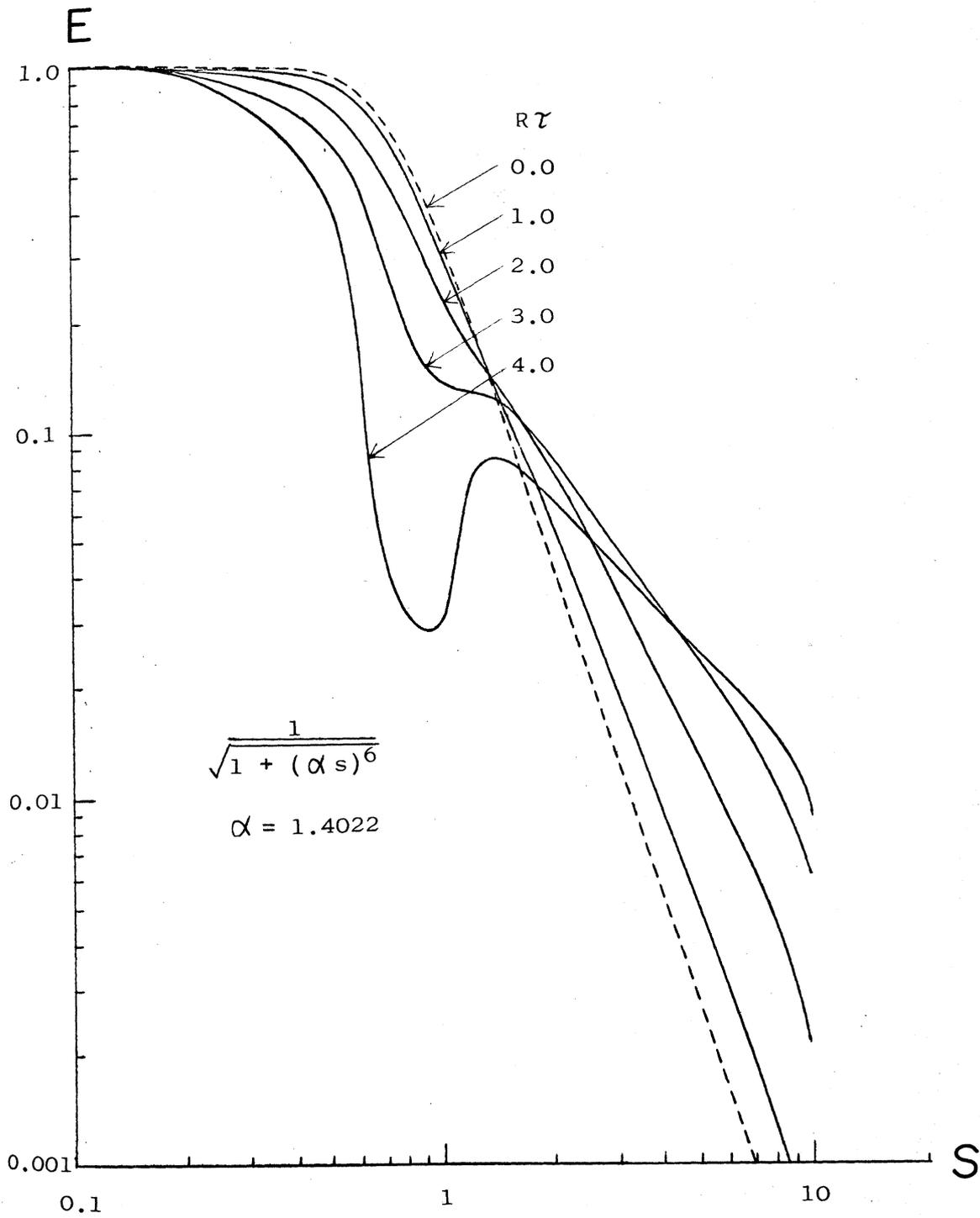


图 5.

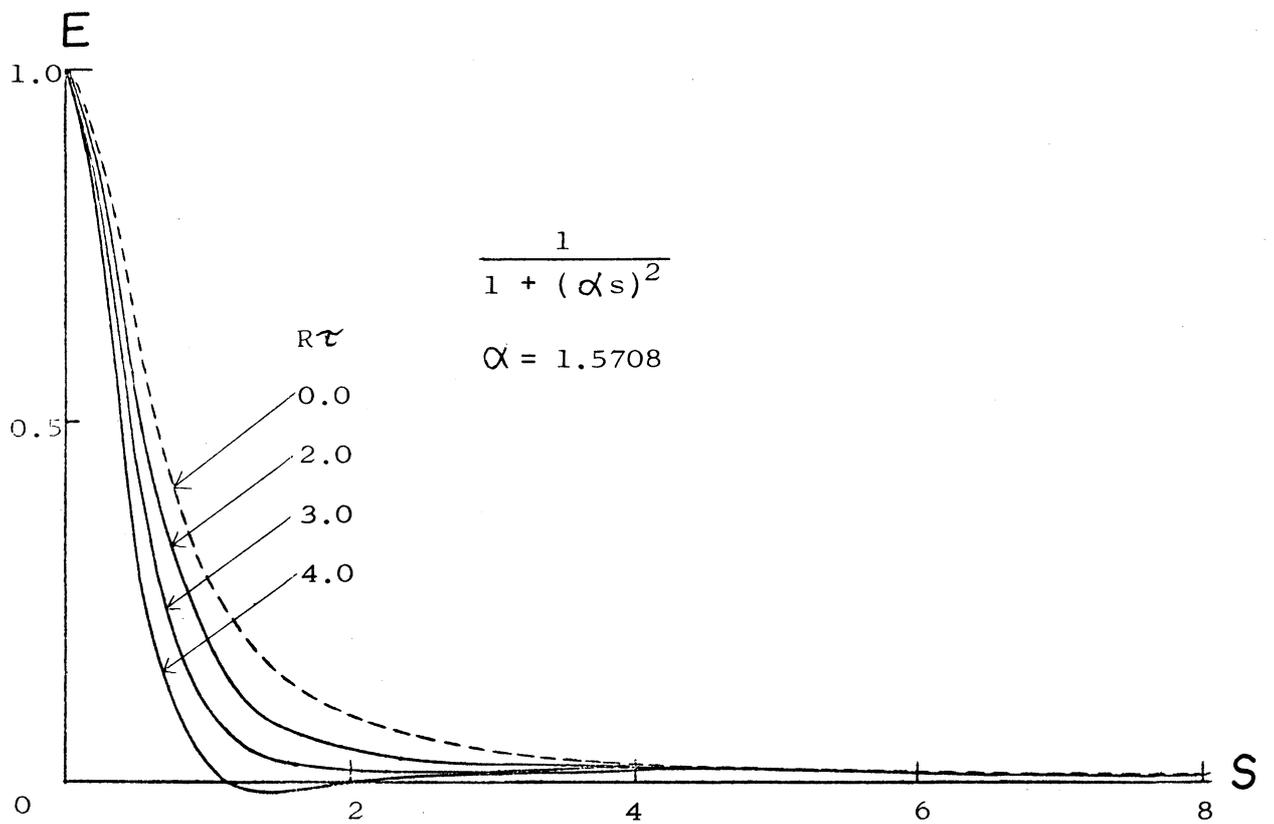
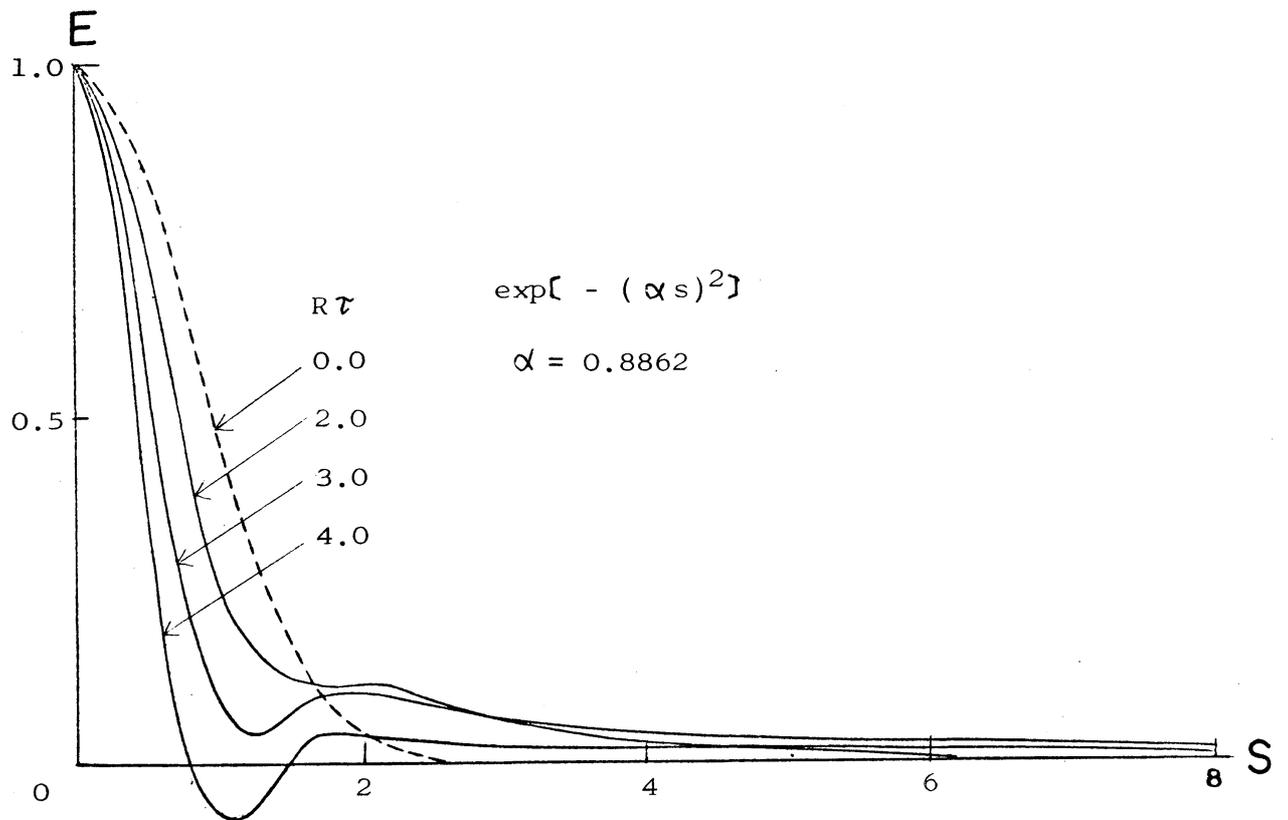


図6: エネルギー・スペクトルの時間的変化の比較。  $R = 100$ .