数理解析研究所講究録
第98巻 1970年 3-11

計算機によるプラパズル
―― とくにテトラヘックスとペントキューブ ――

京大 数理研　一松 信

0. はじめに

以下の話は，ただやってみた結果の報告にすぎないが，幾何学的パズルの分野での二三の話題を紹介する．このうちポリヘクスに関する部分は，[4] に詳述する予定である．

1. ポリヘクスの数

平面充填形の正3，4，6角形をn個つないでできる図形を，それぞれn-アモンド，n-ミノー，n-ヘクスという．前2者によるパズルは市販もされ，かなりの研究もあるが（たとえば[6]），n-ヘクスについては，[3] に少しあるほか，あまり論じられていない．

合同変換で重なるものを同一視して，n-ヘクスは何種できるか？ n-アモンド，n-ミノーとともに，表に示す．このうち（ ）内は二重連結状のものの数で，その外側の数は，二

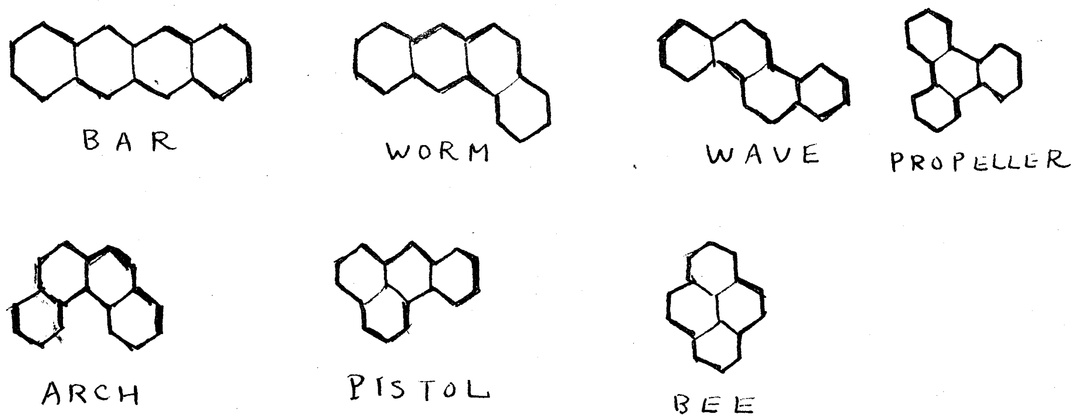
n	1	2	3	4	5	6	7	8
3	1	1	1	3	4	12	24	66
4	1	1	2	5	12	35	108 (1)	369 (6)
6	1	1	3	7	22	82 (1)	358 (2)	? (13)

重連結状のものをも含む総数である．表中下線をつけたものは，講演者が新たに求めたものである．[3] にはヘクサヘクス（$n=6$）は83種とあるが，各種の手による作成および計算機による検査吟味により，82が正しいことを確認した．[1] ヘプトヘクス（$n=7$）は，[3] には未知とあり，計算機による作成で，358をえた．$n=8$ も計画中であるが，記憶容量と時間の関係で，プログラムに改良を要し，まだ試みていない．少なくとも 1500 以上と推定される．

なおプログラムのテストとして，パラメタのきりかえでポリオミノーも作れるようにし，$n=7$ まで完全に n-ミノーが作りだされることを確認した．方法の大要は正6角形（正方形）を並べた形を，その中心を結んだ正3角形（正方形）の格子点で代表させ，格子点の番号で各図形を表わし，$(n-1)$-ヘクスに隣接する1点をつけかえて n-ヘクスを作り，それを回転，反転などして既知の形と違うか否かを調べる，という方式である．

2. テトラヘクスによるパズル

$n=4$ の場合のテトラヘクスは，下記の7種がある．



この7種で，かなりいろいろな図形を埋めることができる．ペントミノー（12種）よりも片が少なく，かえってやさしい初心者向きのパズルである．手でも楽しめるが，計算機により，いろいろな図形の可能な埋め方の総数を求めるのもてごろである．

講演者のやったのは，とくにRUG型について行なったプログラム（[5]）を改造し，データとして与えた図形を埋めるしかたの総数を求めることであった．方針はつぎのとおりである．図形はその中心のなす正3角形の格子の頂点の番号で表現する．便宜上外側に1段分余分をとり，−1を入れておく．空所には0を入れる．各片のおき方は前もってセットする．PROPELLERの特殊性を利用し，まずこのおく位置を求め，そこに1を入れる．以下順次空所であるもっとも若い

番号をさがし，そこにつめられる片を一連番号の順にさがす．第 m 片目がおけたら，その位置に m を入れ，パラメタを $(m+1)$ にして，次の探索に進む．m 片目が入らなければ，一つ前のおき方が悪いとして，パラメタを $(m-1)$ にもどし，m およびそれ以上の値を消す．はじめに外側に -1 をおいたのは，この消去を容易にするためである．最後（$m=7$）の段階では，空所が未使用の片のどれかのおき方とあうか否かをしらべる．うまく解がみつかれば印刷する．そのあとパラメタを1つ前（$m=6$）にもどし，その段階からしらべ直す．このような樹木状の探索をつづけて，$m=1$ が最後までいったとき完了として，解の総数を印刷する．

対称性のある図形については，反転を禁止してよい．現在のところ能率をあげるため，これはデータとともに人間が情報として与えているが，もちろんすべて計算機に判断させることは可能である．言語はリスト処理の可能なものが有利であるが，FORTRAN でやっている．TOSBAC-3400 で，だいたい1つの解をうるのに平均数秒を要する．

その結果を詳しくのべるのは省略する．一つ著しいのは，一辺7の正3角形（胞の数 $28=4\times7$）が不可能なことである．この証明はいろいろの人がやっているが，あらゆる場合をつくしてみる以外にうまい方法がないようである．

3. 正6角形を埋める

正6角形の胞を一辺m個ずつ正6角形状に並べると，全体で胞の数は $3m(m+1)+1$ 個となる．この数ははじめのほうは素数のことが多いが，$m=4$ のとき $37=4\times7+3\times3$ で，テトラヘクスとトリヘクス合計10種をあわせると，埋められる可能性がある．

これはじっさいに可能で，ちょっとためしても，10通りくらいの解は容易にできる．ヘクス系のパズルを売りだすとすれば，これがもっとも簡単で変化が多いようである．

この解の総数は意外に多い．それを求めるプログラムは作ってあるが，現在まで約4時間かけて3000種あまりの解をえたところで中断している．PROPELLERを中心においた解だけで（回転，反転でうつるものは同一として）798種ということがたしかめられている．解の総数は数千，ことによると1万に近いかもしれない．こうなると1つ数秒ではおそすぎるので，プログラムの改良（印刷の節約など）を企画している．—— これ専用のプログラムを作れば，3倍くらいは早くなるはずで，途中までの結果をセットして再出発できるようにして，とにかく総数をだすことだけはやりたいと思う．

4. 立体ペントミノー

以上は私自身によるお遊びだが，以下は論文[1]，[2]の紹介である．立方体を平面ペントミノーの形につないだ12個で，2×3×10，2×5×6，3×4×5 の直方体の箱を埋めることができることは以前から知られていた．最近 Bouwkamp は，計算機による長時間の計算の末，その可能な数がそれぞれ 12，264，3940 であることをえた（[1]，[2]）．[2] にはその方法とプログラムものっている．方法は本質的に上記のものと同じである．I と X の位置により 62（うち 1 は不可能）の型にわけ，おのおのについて，順次若い番号から埋めてゆく方法である．IBM-1620 で数百時間かけて，たんねんにしらべたらしい．ただし最後に A.J. Dekkers による改良（アセンブラによるサブプログラムの集積）が注意してあり，CDC-3600 により，3時間くらいで全部求められるであろう，とのべている．

3940 通りの全部の解をながめて，同類解をまとめること（あるいはそれを計算機にやらせること）は，一つの仕事かもしれない．またこの中から，なるべく「美しい」「変った」解をさがして，人間に挑戦することもできるであろう[2]．参考までに，二三の特長ある解をあげておく．いずれも 4×5 の平面3枚を並べて表現してある．

1×3×5 ＋3×3×5 と分解できる解（本質的に一意的）

P	I	W	L		P	W	W	L		W	W	Z	N
P	I	Z	L		P	Y	Z	N		P	X	Z	N
T	I	Z	L		Y	Y	F	N		X	X	X	V
T	I	F	L		T	Y	F	N		T	X	F	V
T	I	F	V		U	Y	U	V		U	U	U	V

（同数解 16；計算機ではじめてみつかった由）

I を中段の横に、X を中央に縦においた解（一意的）
（ただし 縦横 2重の対称面あり）

Y	W	W	T		I	T	T	T		V	V	V	T
Y	P	W	W		I	P	P	L		V	P	P	L
Y	Y	X	W		I	X	X	X		V	F	X	L
Y	N	N	N		I	U	U	U		F	F	F	L
N	N	Z	Z		I	U	Z	U		F	Z	Z	L

P が内部にある解の一例（全部で 22 ある）

I	W	X	Z		L	W	W	Z		L	T	W	W
I	X	X	X		L	P	P	Z		Y	T	T	T
I	U	X	U		L	P	P	Z		Y	T	F	Z
I	U	U	U		L	P	N	N		Y	Y	F	F
I	V	V	V		N	N	N	V		Y	F	F	V

なお 2×5×6 の 264 種の解の表も入手してある。

補註

1） 桑垣煥氏から、同氏が以前ヘクサヘクスを手で作って、やはり82種しかできなかった旨の御注意をいただいた。これで、両者とも安心した形である。

2） 富士通の池田電算機部長から、昔計算機で立体ペントミノーの3×4×5 の箱詰めをしらべたが、はじめは4時間かかっても、1つも解がでなかったこと、および手で、いろいろ美しい対称性のある解が作られたことなどの御注意をいただいた。計算機で求めた解から「同類解」をさがすのは、かなり大変な仕事である。見た目のきれいな解は、やはり人間のほうがよくできそうである。

なお計算機で数百時間を要する探索も、新しい計算機の連続運転性能試験用には有用だそうなので、あまり遠慮することはないと思われる。

参考文献

[1] C.J.Bouwkamp, Packing a rectangular box with the twelve solid pentominoes, J. of Comb. theory, 7 (1969), 278-280.

[2] C.J.Bouwkamp, Catalogue of solutions of the rectangular 3 x 4 x 5 solid pentomino problem, Technische Hogeschool Eindhoven, mimeographed note, pp. 309, 1967.

[3] M.Gardner, Mathematical games, Scientific American, 1967, 6月号, 124-126.

[4] 一松 信, 正6角形族のパズル ― 計算機によるプラパズルの試み, 数学セミナー 1970, 8月号掲載予定.

[5] 一松 信, 情報処理 9 (1968), プログラムのページ, p. 98-102.

[6] 池野信一, 箱詰めパズルの一種, 数学セミナー, 1967, 4月号, 2-7.