数理解析研究所講究録
第 98 巻 1970 年 88-104

シャノンのスイッチング・ゲームのグラフ理論による構成的解法

日本電気　中研　大附　辰夫

1. はしがき

シャノンのスイッチング・ゲームとは，以前に高橋秀俊先生が'数理科学'誌に紹介されたもの[1]（本稿ではこの言葉の意味を多少広く解釈しているが）のことで，最初Shannonが提唱した[2]ことからこの名前が付けられたのである。これまでこのゲームの戦術を数学的に解明しようとする研究はいくつかあったが[3),(4)]，最近Bruno, Weinbergが発表した理論[5]のように，完全に'構成的'な戦術を与えるものは知られていなかったようである。ここで'構成的'とは，相手方のいかなる戦術に対しても，これに対処する最適の戦術が計算機アルゴリズムとして比較的簡単な手続きによって，（虱つぶしではなく）求められるということを意味する。

著者はこれまでシャノンのスイッチング・ゲームなるものを研究したこともないし，又これをやって遊んだこともない

が，あえてこの問題をとり上げたのは，著者を含むグループによる研究成果がこのゲームの新しい解法に対して間接的な寄与をしていると思われたからである。というのは，Bruno, Weinberg によって発表された最適戦術は，我々の電気回路解析という全く異なった目的の研究から得られた「位相幾何学的自由度」[6]という概念を直接利用しているからである。更に東工大・岸源也先生のグループによる「グラフの基本分割」[7] 東大・伊理正夫先生による「行列の階数，項別階数に関する最大・最小定理」[8]という2つの新しい理論も本質的な役割を果している。ディスカッションに参加したという立場では，著者はこれらの研究にも関係している。

以下，Bruno, Weinberg の理論を中心として，シャノンのスイッチング・ゲームに対する構成的な戦術をグラフ理論の立場から解説してみたいと思う．

2．Bridge-it

最初にシャノンのスイッチング・ゲームの特殊な場合と考えられる Bridge-it というゲーム盤についての高橋先生の解説[1]を簡単に紹介しよう。これは図1(a)に示すように黒と白の突起が格子状に交互に出ているもので，駒は黒又は白の棒で隣り合った突起の間を橋渡し出来るようになっている。そして上下の黒い（左右の白い）縁が黒（白）の陣地である。

ゲームは，黒(白)を持った方は隣り合った黒い(白い)突起を棒で橋渡して行なわれる。一方を先手としこれを交互に行なってどちらが先に自分の陣地をつないでしまうかによって勝負が決まる。ある場所に黒か白が棒を置いたら，それを横ぎって相手が棒を置くことは出来ないと約束する。

Bridge-it を抽象的に表現すれば図1(b)に示すようなグラフとなる。黒(白)の1回のプレイをどれか1つの枝を太い線でぬりつぶす(とりはずす)操作に対応させれば，節点対(S,t)の間を太い線でつないで(切り離して)しまえば，黒(白)の勝ちと解釈できる。このようにBridge-itはグラフの問題と考えられる。これを拡張して，一般に任意のグラフ(平面である必要もない)の特定の節点対が指定されてBridge-itと同じ規則のもとに遊ぶゲームのことを本文ではシャノンのスイッチングゲームと呼ぶことにする。第4節においてこの広義のシャノンのスイッチング・ゲームをグラフの言葉を用いて説明するが，その準備として第3節にこれに必要なグラフ理論の用言を簡単に解説する。

3. グラフ理論の基礎事項

グラフ理論の用語の中には文献によって多少異った意味で定義されているものもあるが，ここでは混乱をさけるために本節で説明した意味に解釈していただきたい。

① グラフ**G**とは，1)有限個の枝の集合E(**G**) 2)有限個の節点の集合V(**G**) 及び，3)各々の枝に対してその端点となる節点対(同一の節点でもかまわない)の指定(これを接続関係という)によって定義されるものである。本文では接続関係において方向性は考えない。又グラフの連結性，可分性等も重要な概念ではあるが，混乱を招くおそれはないと思われるのでその説明は省略する。
グラフ**G**が非連結グラフの時はいくつかの連結グラフの集りと考え，個々の連結グラフを**G**の成分と云う。枝の数をb，節点の数をn，成分の数をsとすれば

$$\rho(\mathbf{G})=n-s$$

$$\mu(\mathbf{G})=b-\rho(\mathbf{G})=b-n+s$$

で定義されるものをそれぞれ**G**の階数，零度と云う。

② グラフの特定の枝を取り除く操作を開放除去，特定の枝を取り除いた後に，その両端点を縮合して1つの節点に置きかえる操作を短絡除去と云う。グラフ**G**の枝のある部分集合$X\subset E(\mathbf{G})$を開放除去，他のある部分集合$Y\subset E(\mathbf{G})$; $X\cap Y=\phi$ を短絡除去して得られるグラフを**G**の部分グラフと呼び，$\mathbf{G}\{X;Y\}$ で表わすことにする。

③ 図2に示すように零度又は階数が1であるような，

非可分グラフ　をそれぞれ polygon graph, bond graph と云う[5]。グラフ $\mathbf{G}$ のある枝の集合 $P \subset E(\mathbf{G})$ に対して $\mathbf{G}\{E(\mathbf{G})-P;\phi\}$ が polygon graph になる時，P をループという。又ある枝の集合 $B \subset E(\mathbf{G})$ に対して $\mathbf{G}\{\phi;E(\mathbf{G})-B\}$ が bond graph になる時，B をカットセットと云う。

④　グラフ $\mathbf{G}$ のループ（カットセット）を含まない最大の枝の集合を木（補木）と云う。木（補木）の枝の数は，階数（零度）に等しい．又１つの木の $E(\mathbf{G})$ に対する補集合は１つの補木である．

⑤　任意の木に対して木の（補木）の枝を１つだけ含むカットセット（ループ）は各々の木（補木）の枝に対して１つだけ存在する。これを基本カットセット（基本ループ）と云う．

⑥　グラフ $\mathbf{G}$ の任意の木の対 T_1, T_2 に対して

$$d(T_1, T_2) \triangleq \rho(\mathbf{G}) - \alpha(T_1 \cap T_2)$$

で与えられる数を木の対 (T_1, T_2) の間の距離という。ここで $\alpha(A)$ は集合 A に属する要素の数を表わすものとする。ある木 T_1 の木（補木）の枝 e_i によって決まる（基本）カットセット（基本ループ）に含まれる任意の枝 $e_j (\neq e_i)$ と e_i とを交換して $d(T_1, T_2)=1$ となるような新しい木

T_2 を得る操作を木の初等変換という。

4. シャノンのスイッチング・ゲーム

シャノンのスイッチング・ゲームは、グラフGとそれに含まれる1つの枝eによって定義される。これを$\mathcal{F}(G, e)$という記号で表わす。一方のプレイヤーは各々のプレイでe以外の枝を一つずつ短絡除去して、eの両端点を縮合させることを目的とする。この人を short player と云う。他方のプレイヤーは各々のプレイでe以外の枝を1つずつ開放除去して、eの両端点を切り離すことを目的とする。この人を Cut player と云う。2人が交互にプレーを行ない最後にe自身が、1つのループ(カットセット)を成している様なGの部分グラフが出来れば、Short(cut) player の勝である。

このゲームは次の様な3種類のタイプに分類できる。(3)

[定義1]

1) 後手の Short(cut) player が先手の Cut(short) player の戦術の如何に関係なく、勝てるようなものを Short game (cut game) と云う。

2) 先手になった方が、後手の戦術の如何に関係なく勝てるようなものを neutral game と云う。

その分類に従えば、第1節で紹介した Bridge-it は、neutral game に属することになる。

[例1]

最も簡単な例として，図3に示す $\mathcal{F}(\mathbf{G}_i, e)$; $i=1,2,3$ はそれぞれ short game, cut game, neutral game である事は明らかであろう。

5. 位相幾何学的自由度，極木，基本分割

本節では Bruno, Weinberg が導いた構成的な戦術に直接応用された文献(6),(7)，の結果を簡単に紹介する。

グラフ$\mathbf{G}$の枝の集合を，$A \cup B = E(\mathbf{G})$, $A \cap B = \phi$ となるように2つの部分集合(A, B)に分割したとき $\mathbf{G}^A \triangleq \mathbf{G}\{B;\phi\}$ 及び $\mathbf{G}^B \triangleq \mathbf{G}\{\phi;A\}$ で定義される部分グラフの対に対して $\gamma' = \rho(\mathbf{G}^A) + \mu(\mathbf{G}^B)$

で与えられる数を考える。このγ'なる数は$E(\mathbf{G})$の分割の仕方によって一般に異った値を持つが，どうやって求めるかは別として，少くとも最小値を与える分割が存在することだけは明らかである。

[定義2]

$$\gamma(\mathbf{G}) \triangleq min.\{\gamma'\}$$

をグラフ$\mathbf{G}$の<u>位相幾何学的自由度</u>という。ここで最小は$E(\mathbf{G})$の全ての可能な分割に対してとるものとする。

この位相幾何学的自由なる概念は$\mathbf{G}$が表わす電気回路の連立方程式における最小の独立変数の数に一致しているのであ

る。[6]

位相幾何学的自由度を与える分割は一般に一通りではない。そこで，その中で特に$\rho(\mathbf{G}^A)$，$\mu(\mathbf{G}^B)$を最小にするような分割の1つを，それぞれ$(S, E(\mathbf{G})-S)$，$(E(\mathbf{G})-C, C)$とすれば，次の定理が成り立つことが証明されている。

[定理1]

1. S及びCは一意に定まる。
2. SとCは枝を共有しない。
3. $\rho(\mathbf{G}^A)$，$\mu(\mathbf{G}^B)$を最小にすれば同時にそれぞれ$\alpha(A)$，$\alpha(B)$も最小にする。

上の定理1[6]より

$$N \triangleq E(\mathbf{G})-(S \cup C)$$

で与えられる枝の集合Nも一意に定まることになる。このようにして定まった$E(\mathbf{G})$の枝を共有しない3つの部分集合(S, N, C)への分割に対応して次のような$\mathbf{G}$の3つの部分グラフを考える。

$$\mathbf{G}^S \triangleq \mathbf{G}\{C \cup N ; \phi\}$$
$$\mathbf{G}^N \triangleq \mathbf{G}\{C ; S\}$$
$$\mathbf{G}^C \triangleq \mathbf{G}\{\phi ; N \cup S\}$$

[定義3]

グラフ$\mathbf{G}$から上の式で定まる3つの部分グラフ$(\mathbf{G}^S, \mathbf{G}^N, \mathbf{G}^C)$を導くことをグラフ基本分割と云う。[7]

定理1よりグラフが与えれば，その基本分割が一意に定まり，更に位相幾何学的自由度もたゞちに求められるわけである。そこで次に基本分割を求める為に本質的な役割を果す極木という概念を導入しよう。グラフGの1つの木をT，Tからの距離$d(T, \widetilde{T})$が最も大きくなるような1つの木を$\widetilde{T}$という記号で表わす。

［定義4］

グラフGの木の中で$d(T, \widetilde{T})$を最大にするような木Tを極木(extremal tree)と云う。当然$\widetilde{T}$も1つの極木となる。別の表現をすれば，木の枝だけから成る独立なカットセットの数を最小とするような木を極木と定義しても良い[6]。あるいは文献[7]では木の対(T_1, T_2)の集合の中で，$d(T_1, T_2)$を最大にするようなものを　　　　　　　　　最大距離にある木の対と定義している。当然T_1, T_2は共に極木となる。

こゝで定義された極木という概念は実は前に定義された基本分割と密接な関係があるのである。すなわちGの1つの極木~~を~~Tにもとづいて再帰的に 定義される 次の様な2つの枝の集合の列から直接，基本分割が求まることが証明されている。

［基本分割をもとめるアルゴリズム］

1)　もとのグラフGをG^0とおく

2)　G^kに含まれるTの補木($\bar{T}$)の枝だけから成るループ

(カットセット)に属する枝及びそのどれかに対応する基本ループ(基本カットセット)に属する木(補木)の枝の集合を $S^k(C^k)$ とおく。$S^k(C^k)=\phi$ となれば終了する。

3) $G^{(k)}$ から $S^k(C^k)$ に属する枝を全て短絡除去(開放除去)して得られるグラフを $G^{(k+1)}$ とおいて、2)へもどる。

[定理2]

グラフGに対して上の2つのアルゴリズムを適用した場合に、それぞれ $S^{p+1}=\phi$, $C^{q+1}=\phi$ となったとして、

$$S=S^0+S^1+\cdots\cdots+S^p$$
$$C=C^0+C^1+\cdots\cdots+C^q$$

とおく。この時 $E(G)$ の順序を考えた3分割 $(S,N,C,)$ は G の基本分割を与えている。但し $N=E(G)-(S\cup C)$ である。

以上グラフの基本分割は1つの極木を見つけることによって直ちに求まる事が明らかになった。残された問題は1つの極木をどのようにして見つけるか、という事である。このアルゴリズムの詳細については、紙数の都合で省略するが、とにかく任意の木から出発して、第3節の⑥で説明した初等変換を有限回、繰り返すことによって極めて簡単に求められることが証明されている。[6),(7)]

[例2]

図4はグラフGの極木と基本分割（G^S, G^N, G^C）の例を示している。

6．最適戦術

本節では‘基本分割’及び‘極木’の概念を応用した，スイッチング・ゲームの解法を紹介する。与えられたスイッチング・ゲームを$\mathcal{F}(G,e)$とする。又Gの基本分割を(G^S,G^N,G^C)とする。

Bruno, Weinbergによって得られた1つの重要な結果は次の定理である。

［定理3］

$\mathcal{F}(G,e)$において，$e\in S$，$e\in N$，$e\in C$　ならばそれぞれshort game，neutral game，cut game である。

上の定理と数学的に等価なものは，これより前にLehmanによって得られているが，具体的にどのタイプに属するかを判定するアルゴリズムが与えられていなかった。[3] すなわち基本分割を求めるアルゴリズムがあるからこそ定理3及び次に述べる戦術が構成的なものとして意味を持つのである。次に戦術について述べる。

［戦術1］：short (cut) game：

先手のcut（short）playerの如何なる戦術に対しても後手のshort（cut）playerが勝つための戦術を

与える。cut (short) player が k=奇数番目のプレイにおいて，枝 $e_k \in S$ ($e_k \in C$) を開放除去(短絡除去)すると仮定する。これ以外の枝に手を出した場合，short (cut) player は1回プレーを休んでも勝てるので着手から除外する~~である~~。まず $G^s\{e;\phi\}$ ($G^c\{\phi;e\}$) において $e_k \in T$ ($e_k \notin T$) となるような1つの極木を求める。このような極木は必らず存在する。[6] Short (cut) player は e_k に対応した T にもとづく基本カットセット(基本ループ)に属する e_k, e 以外の任意の枝を短絡除去(開放除去)すれば良い。

このようにして k 番目と(k+1)番目のプレイが終了した時点ではより小さいグラフについてのスイッチング・ゲームに帰着され，当然今度も short (cut) game である。そこで上に述べた手順を繰り返せば最後には short (cut) player が勝つことになる。

［例3］

図5は cut game の例である。この時 $C=\{e, 1, 2, 3, 4\}$ に属する枝が双方の最適戦術に関係する。例えば枝 1, 2, 3, 4, の順にプレーが行なわれて，後手の cut player が勝つ。

［戦術2］：neutral game

先手が常に勝てる為の戦術を与える。short (cut) player が先手の時は，図6に示すように e を架空の枝 e' と e が並

列(直列)に接続されたもので置き代えればshort(cut)gameの問題となる。そこで相手のcut(short) playerが才一手としてe'を開放除去(短絡除去)するという架空のプレーを行った状態とみなして，戦術1に帰着させることが出来る。

以上グラフ理論に始まって，基本分割，シャノンのスイッチング・ゲームの解法を説明してきたが，この中に互に双対な関係にある概念が多く使われているのに気づかれたと思う．本稿に説明したいくつかの命題では双対概念を持つ用語の括弧の中にそれを並記して双対の命題を同時に記述してある。

文献

(1) 高橋秀俊："シャノンのスイッチング・ゲームの理論"，数理科学，1966年4月

(2) C. E. Shannon: "Game playing machines", J. Franklin Inst., Dec. 1955

(3) A. Lehman: "A solution to the Shannon switching game", J. Soc. Ind. Appl. Math., Dec. 1964

(4) J. Edmonds: "Lehman's switching game and a theorem of Tutte and Nash-Williams", J. Res. NBS, Jan.-June 1965

(5) J. Bruno and L. Weinberg: "A constructive

graph-theoretic Solution of the Shannon Switching game" IEEE Trans. on Circuit Theory, Feb. 1970

(6) 大附辰夫，石崎靖敏，渡部 和："回路網解析と位相幾何学的自由度"，電子通信学会論文誌A，1968年6月

(7) 岸源也，梶谷洋司："リニアグラフにおける最大距離にある二つの木"，同上，1968年5月

(8) 伊理正夫："行列の階数および項別階数に関する一つの最大最小定理"，同上，1968年5月

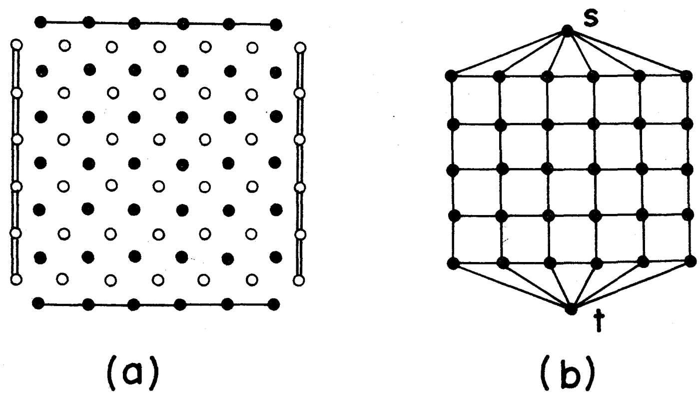

図 1.　Bridge-it

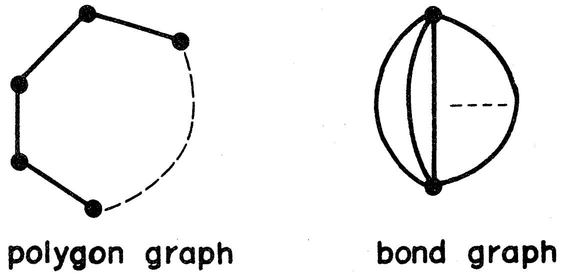

図 2.

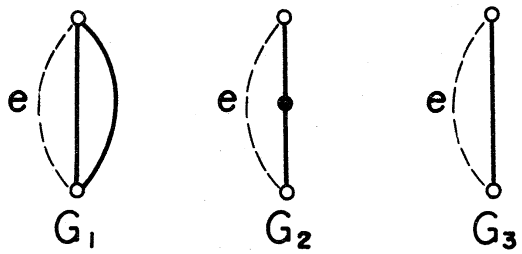

図 3.

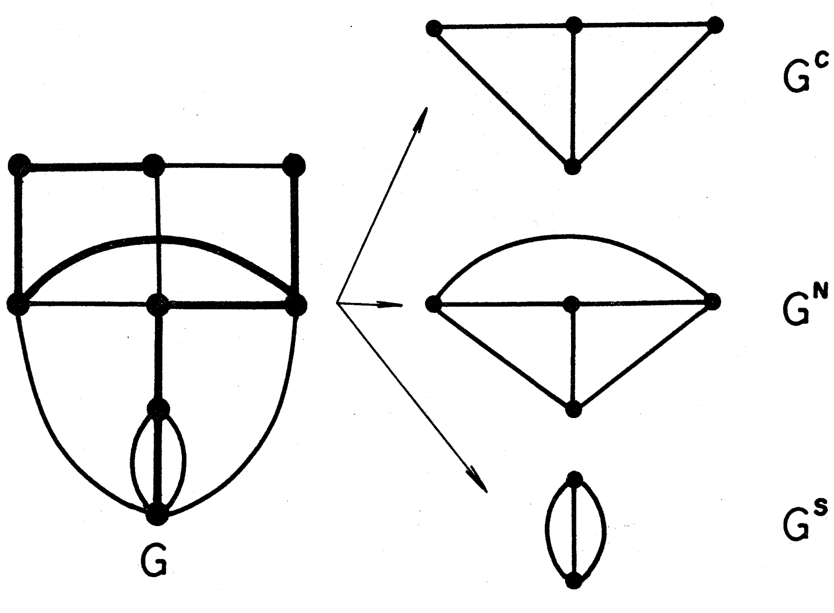

図 4. グラフの基本分割

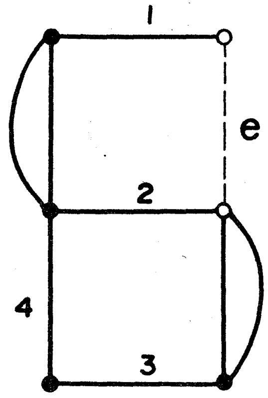

図 5. cut game の例

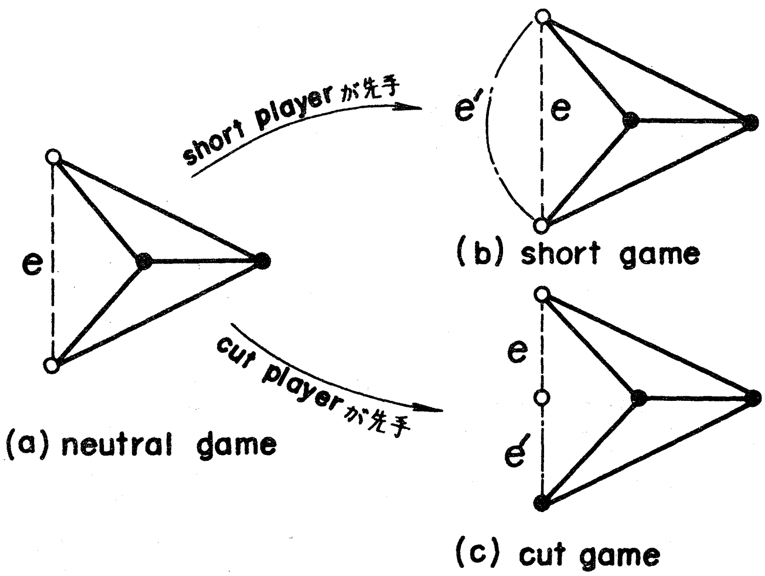

図 6.