数理解析研究所講究録
第100巻 1970年 10-21

有限 Chevalley 単純群の Schur Multiplier について

岩堀 長慶（東大理）

§1. 序

この研究集会の主題は，有限群 G に対して，その $\mathbb{Z}$ 係数の homology，cohomology（trivial action の下での）を位相的方法で調べる由であり，それについて Chevalley 型の有限群 G に対する $H^3(G, \mathbb{Z})$ を与える R. Steinberg の研究 [3] を紹介するように依頼された。それ故，別に新らしい事もなく，[3] が入手困難という訳でもないのに，わざわざ紹介を再録するのも気がひけるが，解説記事として茲に書かせて頂く次第である。

§2. universal central extension; Schur Multiplier

今，群と準同型写像よりなる exact sequence

$$(1) \qquad 1 \longrightarrow K \xrightarrow{i} \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

に於て，K が $\tilde{G}$ の中心に含まれるとき，対 $(\tilde{G}, \pi)$ を G の中心拡大（central extension）という。群 G の中心拡

大(1)が次の性質をもつとき，これを G の universal な中心拡大（universal central extension，略記 u.c.e.）という：

群 G の任意の中心拡大

(2) $1 \longrightarrow L \xrightarrow{j} G^* \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$

に対して，準同型 $f : \tilde{G} \longrightarrow G^*$ が存在して，

$$\pi = p \circ f$$

を満たす。しかも，かかる f は一意的である．

すると次の事実が容易に判る．

(1°) 群 G の u.c.e. は，同型を除いて高々一通りしか存在しない。

(2°) 群 G の u.c.e. が存在する為の必要十分条件は，G とその交換子群 $[G, G]$ が一致することである。

かくして，$G = [G, G]$ なる群に対しては，同型を除き u.c.e. が決る．(1)を G の一つの u.c.e. とすれば，kernel K の構造は一意確定する．このアーベル群 K を，群 G の Schur Multiplier と呼び，$K = M(G)$ と書く。

(3°) G を有限群とし，かつ $G = [G, G]$ とすれば，$M(G)$ も有限群であって，しかも

$$M(G) \cong H^2(G, \mathbb{C}^*) \cong H^3(G, \mathbb{Z})$$

が成り立つ.（cohomology は凡て trivial action の下で考える.）

（4°） 群 G が $G=[G,G]$ を満たせば，G の u.c.e. $(\tilde{G},\pi)$ に対しても $\tilde{G}=[\tilde{G},\tilde{G}]$ が成り立ち，しかも $M(\tilde{G})=1$ である．実は逆も成り立つ：

（5°） 群 G が $G=[G,G]$ を満たせば，G の中心拡大 $(\tilde{G},\pi)$ が u.c.e. $\Longleftrightarrow$ $\tilde{G}=[\tilde{G},\tilde{G}]$，$M(\tilde{G})=1$.

§3. Chevalley 群の Schur Multiplier

今，G を体 K 上に定義された半単純代数群とし，しかも次の条件が満たされているとする：

(a) G は K 上 split（Chevalley 型ともいう）である．即ち，G は K 上 split するような maximal torus をもつ．

(b) G は単連結である．

しかも，記述を容易にする為，次の仮定もおく：

(c) G は単純な代数群である．

この時，G の K-rational point のなす部分群を G_K と書く．すると，$G_K \neq [G_K, G_K]$ となるのは次の4つの場合に限ることが知られている．

イ. $G_K = SL(2, \mathbb{F}_2)$ （$\mathbb{F}_q$ は q 元の有限体の意）

ロ．　$G_K = SL(2, \mathbb{F}_3)$

ハ．　$G_K = Sp(2, \mathbb{F}_2) \subset GL(4, \mathbb{F}_2)$

ニ．　$G = (G_2)$ 型，　$K = \mathbb{F}_2$

従って，これら4つの場合を除けば，$M(G_K)$ が考えられる。さて，G_K の中心を Z_K と書くと，次の Chevalley の定理が成り立つ。

(1°) 上記4つの場合を除けば，G_K/Z_K は単純群である（不変部分群が trivial なものに限る）。

以下，上記の4つの場合は考察から省くことにする。また $G_K \neq SL(2, K)$ とする。さて Steinberg [3] の基本定理は次の通りである：

(2°) K が有限体の代数拡大であり，しかも K 中に少くも5個の元があれば，

$$M(G_K) = 1, \qquad M(G_K/Z_K) \cong Z_K .$$

この定理を使えば，K が有限体 $\mathbb{F}_q$ であるとき，$M(G_K/Z_K) \cong Z_K$ の構造は直ちに得られる。すなわち，今 G のルート系を Δ とし，Δ の張る加群を P_0 とする。また，G の weight 全体のなす加群を P とする。P_0 は P の部分群で，P/P_0 は有限アーベル群である。今，

$$P/P_0 \cong \mathbb{Z}_{e_1} \times \mathbb{Z}_{e_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{e_r}$$

を巡回群の直積への分解とすれば，

$$Z_K \cong \mathbb{Z}_{(e_1,\, q-1)} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{(e_r,\, q-1)}$$

が成り立つ。

注意 1. (A_ℓ)型～(E_8)型に対し，組$(e_1, \cdots, e_r)$は勿論次の如く周知である：

(A_ℓ)　$r=1$，$e_1=\ell+1$；　(B_ℓ)，(C_ℓ)　$r=1$，$e_1=2$

$(D_{2\ell})$　$r=2$，$e_1=e_2=2$；　$(D_{2\ell+1})$　$r=1$，$e_1=4$

(G_2)，(F_4)，(E_8)　$r=1$，$e_1=1$

(E_6)　$r=1$，$e_1=3$

(E_7)　$r=1$，$e_1=2$.

注意 2. $K=\mathbb{F}_2$，$\mathbb{F}_3$，$\mathbb{F}_4$ に対しては，実際 $(2°)$ は成立しない例がある。例えば，$G_K=SL(4, \mathbb{F}_2)$ は 8次交代群と同型で，$M(G_K)\cong\mathbb{Z}_2$ となる。Steinberg は $M(G_K)\neq 1$ なる G の type は有限個しかないと述べているが筆者はその証明を知らない。$G_K=SL(n, K)$ の型の時の $M(G_K)\neq 1$ なる例は，次の5個であることが知られている。

$SL(2, \mathbb{F}_4)$，$SL(2, \mathbb{F}_9)$，$SL_3(\mathbb{F}_2)$，$SL(3, \mathbb{F}_4)$，$SL(4, \mathbb{F}_2)$.

注意 3. $G_K=SL(2, K)$，K は有限体の代数拡大とすると，$M(G_K)\neq 1$ となるのは，$K=\mathbb{F}_4$，$K=\mathbb{F}_9$ の時に限る。

注意 4. 最近 C. C. Moore, H. Matsumoto により，一般の K に対して，$M(G_K)$ が決定された。それは，生成系と基本関係式の形で与えるのであるが，これについては §5 でも

う一度触れる。

§4. 証明の筋道

ここでは Steinberg の証明方針のみスケッチする。まず，G_K の良く知られた生成系 $x_\alpha(t)$（α はルート系 Δ 上を動き，t は体 K 上を動く。）をとると，次の関係が成り立っている：

(A)　$x_\alpha(t+s) = x_\alpha(t)\, x_\alpha(s)$　$(\forall\alpha \in \Delta,\ \forall t, s \in K)$

(B)　$\alpha\in\Delta$，$\beta\in\Delta$，$\alpha+\beta \neq 0$ のとき，Chevalley の交換子関係

$$[x_\alpha(t), x_\beta(s)] = \prod x_{i\alpha+j\beta}(C_{ij\alpha\beta}\, t^i s^j)$$

が成り立つ。（$C_{ij\alpha\beta}$ は Δ から決る有理整数で，K には無関係，積の順序は，例えば (i, j) の辞引順である。i, j は次のような自然数上を動く：$i\alpha + j\beta \in \Delta$.）

簡単のため，$G_K \neq SL(2, K)$ とする。いま，$t \in K^* = K - \{0\}$ に対し，

$$w_\alpha(t) = x_\alpha(t)\, x_{-\alpha}(-\tfrac{1}{t})\, x_\alpha(t) \qquad (\alpha \in \Delta)$$

$$h_\alpha(t) = w_\alpha(t)\, w_\alpha(1)^{-1} \qquad (\alpha \in \Delta)$$

とおく。すると G_K において，次の関係も成り立つ：

(C) $\quad h_\alpha(ts) = h_\alpha(t)h_\alpha(s) \qquad (\forall\alpha\in\Delta,\ \forall t,s\in K^*)$.

Steinberg は (A)+(B)+(C) が，生成系 $\{x_\alpha(t)\}$ に関して，G_K の基本関係になることを証明する。しかも G_K の u.c.e. を $(\tilde{G}_K, \pi)$ とするとき，$\tilde{G}_K$ は生成系 $\{\tilde{x}_\alpha(t);\ \alpha\in\Delta,\ t\in K\}$ と，基本関係 (A)+(B)（勿論 (A)，(B) で $x_\alpha(t)$ を $\tilde{x}_\alpha(t)$ で置き換えたものの意である）で与えられることを証明する．ここまでは一般の体 K でよい．最後に，K が有限体の代数拡大で，しかも K が少くとも 5 個の元が持つならば，(C) が (A)+(B) から導かれることを示すのである。

生成系 $\{\tilde{x}_\alpha(t)\}$ と基本関係 (A)+(B) とで定義された群 $\tilde{G}_K$ から G_K 上への準同型 $\pi : \tilde{x}_\alpha(t) \longmapsto x_\alpha(t)$ が生ずるが，$(\tilde{G}_K, \pi)$ が G_K の u.c.e. であることをいうには，次の諸点をいえばよい：イ. $\mathrm{Ker}(\pi) \subset$ center of $\tilde{G}_K$；ロ. universality.

これをいうには，対応して $\tilde{w}_\alpha(t)$ $(\alpha\in\Delta,\ t\in K^*)$ と $\tilde{h}_\alpha(t)$ $(\alpha\in\Delta,\ t\in K^*)$ とを定義し，これらに対して，次のような（Chevalley 群論で周知の）関係式を，(A)+(B) から導く：

$$\left\{\begin{array}{l}\tilde{w}_\alpha(t)\,\tilde{x}_\beta(s)\,\tilde{w}_\alpha(t)^{-1}=\tilde{x}_{\beta'}(t^c s\cdot\eta_{\alpha,\beta})\,;\\ \qquad \eta_{\alpha,\beta}=\pm 1 \text{ は } K \text{ に無関係},\ \beta'=w_\alpha(\beta),\ c=\dfrac{2(\beta',\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \text{ (以下同じ)}\\ \tilde{w}_\alpha(t)\,\tilde{w}_\beta(u)\,\tilde{w}_\alpha(t)^{-1}=\tilde{w}_{\beta'}(\eta_{\alpha,\beta}t^c u)\\ \tilde{w}_\alpha(t)\,\tilde{h}_\beta(u)\,\tilde{w}_\alpha(t)^{-1}=\tilde{h}_{\beta'}(\eta_{\alpha,\beta}t^c u)\,\tilde{h}_{\beta'}(\eta_{\alpha,\beta}t^c)^{-1}\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\tilde{h}_\alpha(t)\,\tilde{x}_\beta(u)\,\tilde{h}_\alpha(t)^{-1}=\tilde{x}_\beta(t^d u),\quad d=\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\\ \tilde{h}_\alpha(t)\,\tilde{w}_\beta(u)\,\tilde{h}_\alpha(t)^{-1}=\tilde{w}_\beta(t^d u)\\ \tilde{h}_\alpha(t)\,\tilde{h}_\beta(u)\,\tilde{h}_\alpha(t)^{-1}=\tilde{h}_\beta(t^d u)\,\tilde{h}_\beta(t^d)^{-1}.\end{array}\right.$$

次に，ルートに順序を入れ，正のルート系 Δ^+ を考えて，$\{x_\alpha(t)\,;\ \alpha\in\Delta^+,\ t\in K\}$ の生成する $\tilde{G}_K$ の部分群を $\tilde{\mathfrak{U}}$ とし，また $\{h_\alpha(t)\,;\ \alpha\in\Delta,\ t\in K^*\}$ の生成する $\tilde{G}_K$ の部分群を $\tilde{\mathfrak{H}}$ とする．さらに，Weyl 群 W の元 w に対して，$\{\alpha\in\Delta^+\,;\ w(\alpha)\in\Delta^-\}$ を $\Delta(w)$ とし，$\{x_\alpha(t)\,;\ \alpha\in\Delta(w),\ t\in K\}$ の生成する $\tilde{\mathfrak{U}}$ の部分群を $\tilde{\mathfrak{U}}_w$ と書く．すると，上の諸等式から，G_K と同様に，$\tilde{G}_K$ の Bruhat 分解が証明される：

$$\tilde{G}_K=\bigcup_{w\in W}\tilde{\mathfrak{U}}\,\tilde{\mathfrak{H}}\,\sigma(w)\,\tilde{\mathfrak{U}}_w \qquad (\text{disjoint union})$$

ここで，$\sigma(w)$ は，w を鏡映の積

$$w = w_\alpha w_\beta \cdots w_\gamma \qquad (\alpha, \beta, \cdots, \gamma \in \Delta)$$

に表わす方法を一つずつ定めておき，

$$\sigma(w) = \tilde{w}_\alpha(1)\, \tilde{w}_\beta(1) \cdots \tilde{w}_\gamma(1)$$

とおいて定めた $\tilde{G}_K$ の元である。

しかも，$\hat{\mathfrak{U}}\tilde{\mathfrak{H}}\sigma(w)\hat{\mathfrak{U}}_w$ の元は，

$$u h \sigma(w) u'$$

$(u \in \hat{\mathfrak{U}},\ h \in \tilde{\mathfrak{H}},\ u' \in \hat{\mathfrak{U}}_w)$ の形に一意的に書ける。しかも，π を $\hat{\mathfrak{U}}$ 上に制限した $\pi|_{\hat{\mathfrak{U}}}$ は単射的であることも判る。

これから，$\mathrm{Ker}(\pi)$ が $\tilde{G}_K$ の中心に入ること，および $[\tilde{G}_K, \tilde{G}_K] = \tilde{G}_K$ が出る。$\tilde{G}_K$ がその交換子群と一致することから，universality における構成すべき準同型写像の一意性が得られる。最後に，G_K の中心拡大 (G^*, π^*) に対して，準同型 $f: \tilde{G}_K \to G^*$，$\pi^* \circ f = \pi$，を構成するのであるが，それには先ず map $\sigma: \tilde{G}_K \to G^*$ をとり，$\pi^* \circ \sigma = \pi$ であり，しかも次の性質が成り立つようにする：$k, c \in K^*$ をえらんで，$c = k^2 \neq 1$ ならしめると，

$$\tilde{x}_\alpha(t) = [\tilde{h}_\alpha(k), \tilde{x}_\alpha(\tfrac{t}{c-1})] \qquad (\forall t \in K, \forall \alpha \in \Delta)$$

が自然に成り立つのであるが，σ のえらび方の条件として，

$$\sigma(\tilde{x}_\alpha(t)) = [\sigma(\tilde{h}_\alpha(k)), \sigma(\tilde{x}_\alpha(\tfrac{t}{c-1}))] \qquad (\forall \alpha \in \Delta, \forall t \in K)$$

が成り立つようにするのである。このようなσの存在は容易にわかる。以下，$\sigma(x_\alpha(t))=x^*_\alpha(t)$ 達が (A)+(B) を満たすことを示すのであるが，それが [3] の主要部をなす計算であって，原著にゆずる。

§5. 基礎体 K が一般の場合

§3 で考えた G_K に対し，K が有限体の代数拡大でないと一般には $M(G_K)\neq 1$ となる。$M(G_K)$ の構造の決定は，合同部分群の問題と密接に関連している（[1], [2] 参照）が，ここでは，[1] により $M(G_K)$ の構造を概略述べよう。
§3 と同じく $\tilde{G}_K$ を考え，exact sequence

$$1\longrightarrow M(G_K)\longrightarrow \tilde{G}_K \xrightarrow{\pi} G_K \longrightarrow 1$$

における kernel $M(G_K)$ を調べるのである。

Π をルート系 Δ の基本ルート系とする。先ず，

$$b_\alpha(t,s)=\tilde{h}_\alpha(t)\tilde{h}_\alpha(s)\tilde{h}_\alpha(ts)^{-1}\quad (\alpha\in\Delta;\ t,s\in K^*)$$

とおくと，$b_\alpha(t,s)\in M(G_K)$ は明らかであるが，実は，

$$\{b_\alpha(t,s);\ t,s\in K^*,\ \alpha\in\Pi\}$$

により $M(G_K)$ が生成されることがわかる。実は，更に長い方のルート β を一つ任意に固定すれば，実は

(*) $$\{b_\beta(t,s);\quad t,s\in K^*\}$$

が $M(G_K)$ を生成することがわかる．よって $M(G_K)$ の構造を決定するには，この生成系 (*) に関する群 $M(G_K)$ の基本関係式を与えればよい。簡単の為 $b_\beta(t,s)=b(t,s)$ とおく．すると求める基本関係式系は次の様になる．($G=SL(2,K)$ の時を含む.)

(1) $$b(t,s)\,b(ts,r)=b(t,sr)\,b(s,r) \qquad (t,s,r\in K^*)$$
$$b(1,s)=b(s,1)=1 \quad (s\in K^*)$$

(2) $$b(t,s)\,b\left(t,-\frac{1}{s}\right)=b(t,-1) \qquad (t,s\in K^*)$$

(3) $$b(t,s)=b(s^{-1},t) \qquad (t,s\in K^*)$$

(4) $$b(t,s)=b(t,-ts) \qquad (t,s\in K^*)$$

(5) $$b(t,s)=b(t,(1-t)s) \qquad (t,s\in K^*,\ t\neq 1)$$

しかも，Δ が $(C_n)_{n\geq 1}$ 型 ($(C_1)=(A_1)$ である) でない場合，即ち $G_K\neq Sp(n,K)$ の時には，実はもっと簡単な次の基本関係式系になる：

(1') $b(t,s)$ は t,s の各々について乗法的：

$$\left.\begin{aligned} b(tt',s)&=b(t,s)\,b(t',s)\\ b(s,tt')&=b(s,t)\,b(s,t')\end{aligned}\right\} \quad (t,t',s\in K^*)$$

$$(2') \quad b(t, s) = b(s, t^{-1}) \qquad (s, t \in K^*)$$

$$(3') \quad b(t, -t) = 1 \qquad (t \in K^*)$$

$$(4') \quad b(t, 1-t) = 1 \qquad (t \in K^*, t \neq 1)$$

これら (1')～(4') は，局所体のノルム剰余記号のもつ性質である。この事実のもつ意義は，Kが局所体，代数体の時に明らかになるが，それについては [1]，[2] を見られたい。

参考文献

[1] C. C. Moore : Group extensions of p-adic and adlic linear groups, to appear in Publ. Math.

[2] H. Matsumoto : Sur les sous-groupes arithmetiques des groupes semi-simple deployes, to appear.

[3] R. Steinberg : Générateurs, relations et revêtements de groupes algébriques, Colloque de Bruxelles, 1962, pp.113-127.