数理解析研究所講究録
第104巻 1970年 9-22

Traceの存在証明

名工大　小野貴生

§1. 序

Murray - v. Neumannは可分かつfactorな有限型von Neumann代数においてtraceの存在を証明し，Dixmierが一般の有限型von Neumann代数の場合に拡張した．Kadisonはこれらの証明の簡易化を行った．また，Yenは十分に多くのp-normalなstateをもつ有限型AW*代数において，Goldmanは十分に多くのcenterの値をとる拡張された意味でのp-normalなstateをもつ有限型AW*代数において，それぞれ，centerの値をとるtraceの存在を証明した．いづれの証明も，Murray - v. Neumannに淵源する相対次元とp-normalなstateとの比較法に由っている．

この小文で，これに関聯して，つぎの定理の証明の概略をのべたい．

定理．有限型AW*代数においてDixmier traceが存在する．

§2. Reduction

Aを有限型 AW^* 代数とする. 以下 Z, H, P, U, Wは, それぞれ, Aの center, 自己共役元, 射影元, ユニタリ, 準等距離元の全体とする. Aは主単位元をもつ. これを1で表はす. Pの次元函数をD, Aの restricted Dixmier trace をFで表はす.

Zの character λとZの極大イデアルNとは対応:

$$N = \{ z ; \lambda(z) = 0, z \in Z \}$$

により一対一に対応する (Gelfand). Zの極大イデアルNとAの極大イデアルMとは対応:

$$N = M \cap Z$$

により一対一に対応する (Wright). Aの極大イデアルMを任意にとると商代数A/Mは有限型 AW^*-factor になる. (Wright-Yen, Wright が Dixmier trace の存在を假定し, Yen がその假定をとり除いた.) この Wright-Yen の reduction 定理を使って, Yen は '有限型 AW^*-代数における trace の存在問題は有限型 AW^*-factor における trace の存在問題に帰着できる' ことを示した. したがって, trace の存在証明をするためには, 考察する有限型 AW^* 代数は factor としてよい.

A を有限型 AW^*-factor とする．A は discrete の場合と continuous の場合に別れるが，discrete の場合，A は複素数体 C 上の有限 n 次の行列全体のつくる有限型 AW^*-factor $(C)_n$ と * 同型で，$(C)_n$ では trace t は

$$t(a) = (1/n)\sum_{i=1}^{n}(a)_{ii},$$

ここに $a \in (C)_n$，$(a)_{ij}$ は a の ij-成分，の形で存在するから，A にも trace が存在する．したがって，A は continuous の場合，すなはち type II_1 AW^*-factor の場合に限定してもよい．

A は type II_1 型 AW^*-factor とする．A（あるいは可算個の type II_1 型 AW^*-factors $\{A_n\}$）から出発して新しい type II_1 AW^*-factor をつくり出す方法が３つある．

i) $0 \neq e \in P$ をとって，eAe をつくる．これは Kaplansky により，A とともに type II_1 AW^*-factor となる．

ii) A 上有限 n 次の行列全体 $(A)_n$ をつくる．これは Berberian により，A とともに type II_1 AW^*-factor となる．

iii) $\{A_n\}$ の Kaplansky の意味における C^*-sum K をつくる．K の center を $\mathfrak{m}$ とおく．$\mathfrak{m}$ は C の有界数列全体のつくる可換 AW^*-algebra になる．$\mathfrak{m}$ の basis $\{\xi_j\}$ ($\xi_j = \{\delta_{ij}\}_{i=1}^{\infty}$,

δ_{ij} は Kronecker delta）をとり，$\lambda(\xi_j)=0$ for $\forall j$ となる m の character 全体を Δ とする．K は有限型 AW* 代数で，$\lambda\in\Delta$ を任意にとって，λ に対応する K の極大イデアル M による K の商代数 K_λ をつくれば，Wright-Yen の reduction 定理により，K_λ は $\{A_n\}$ とともに type II_1 AW*-factor になる．

A から出発して，行列代数 $(A)_n$ $(n\geqq 1)$ をつくり，$\{(A)_n\}$ の全体を Ψ とし，$B_n\in\Psi$ $(n\geqq 1)$ をとり，$\{B_n\}$ の C*-sum K をつくり，任意の $\lambda\in\Delta$ に対し K_λ をつくる，このようにしてできる K_λ の全体を Φ とし，Φ にぞくする type II_1 AW*-factor の部分 Banach * 代数となる type II_1 AW*-factor の全体を Γ で表はす．type II_1 AW*-factor B が Γ にぞくする type II_1 AW*-factor と * 同型になることを '$B\rho\Gamma$' で表はす．

補助定理 1．Γ はつぎの性質をもつ：

1) $A\rho\Gamma$，

2) $B\rho\Gamma$ かつ e が B の 0 でない射影元ならば $eBe\rho\Gamma$，

3) $B\rho\Gamma$ ならば $(B)_n\rho\Gamma$ for $\forall n$，

4) $B_n\rho\Gamma$ $(n\geqq 1)$ かつ $\lambda\in\Delta$ ならば $K_\lambda\rho\Gamma$，ここに K_λ は $\{B_n\}$ の C*-sum K の λ に対応する極大イデアルによる商代数．

次節においては，与えられた type II_1 AW*-factor A から出発して Γ をつくり，$\rho\Gamma$（$\in\Gamma$ といっても本質的に同じ）となる type II_1 AW*-factor のみを考察する．すなわち，無制限に広いはんいの type II_1 AW*-factor は考えない．いちいち $\rho\Gamma$ であることは断らない．また，記号 A は $\rho\Gamma$ となる任意の type II_1 AW*-factor に使う．

§3．射影元の1次不等式の変形．

II_1 型 AW*-factor A における射影元の一次結合不等式

(1)　$\sum_{i=1}^{n} e_i \leqq \eta$　（または $\geqq \eta$）

を簡単のため第一種（または第二種）の関係式という，ここに，n は自然数，$\{e_1, \cdots, e_n\}$ は A の射影元の系，η は実数で，

(2)　$\rho = \sum_{i=1}^{n} D(e_i)$

とおく．このとき，この関係式は A で定義されているという．

関係式の素材

(3)　$(n, \leqq, \eta, \rho)$（または $(n, \geqq, \eta, \rho)$）

は，適当な II_1 型 AW*-factor A が存在して，そこで定義された関係式 (1) で (3) をみたすものがあるとき，この関係式 (1) によって実現される，あるいは単に実現されるという．このとき，関係式 (1) を (4) を実現する関係式という．以降

11

，関係式の素材を単に素材という．素材（3）は不等号の向きが $\leqq$（または $\geqq$）であるとき第一種（または第二種）であるという．

素材 $(n, \leqq, \eta, 0)$ は関係式 $\sum_{i=1}^{n} 0 \leqq \eta$ により，素材 $(n, \geqq, \eta, n)$ は，$\eta \leqq n$ のとき，関係式 $\sum_{i=1}^{n} 1 \geqq \eta$ により，それぞれ実現されている．

素材

(4)　$(n, \leqq, \eta, \rho^*)$（または $(n, \geqq, \eta, \rho^*)$）

が，ρ を適当にとると素材（3）が実現されていて，

(5)　$\rho^* = \sup$（または $\inf$）$\{\rho$；素材(3)が実現される$\}$

をみたすとき，この素材は最適であるという．

関係式(1)または素材（3）は

(6)　$\eta = 0$ または $\rho = 0$

であるとき trivial であるという．関係式(1)は

(7)　$e_1 \cup \cdots \cup e_n = 1$ または $\eta = \rho = 0$

であるとき正規であるという．関係式(1)は

(8)　$D(e_1) = \cdots = D(e_n)$

であるとき，均質であるという．

最適な素材に関してつぎの3つの基本的な補助定理が成り立つ．

補助定理 2. 最適な素材は実現される.

補助定理 3. η が

(9) $0 \leqq \eta \leqq n$

をみたすとき，最適な素材 (4) は存在する.

補助定理 4. trivial でない最適な素材を実現する関係式は正規である.

最適な素材の変形に関してつぎの 3 つの基本的な補助定理が成り立つ.

補助定理 5. 素材 (4) が最適で (9) が成り立つとき素材

$$(n, \geqq, n-\eta, n-\rho^*) \quad (\text{または } (n, \leqq, n-\eta, n-\rho^*))$$

は最適である.

補助定理 6. 素材 (4) が最適で

(10) $1 \leqq \eta \leqq n$

が成り立つとき素材

$$(n, \geqq, n/\eta, n/\rho^*) \quad (\text{または } (n, \leqq, n/\eta, n/\rho^*))$$

は最適である.

補助定理７．素材 $(n, \leqq, r, \rho^*)$ (r は自然数) が最適で (10) が成り立つとき素材

$$(r(n-r), \leqq, r, (n-r)\rho^*/(n-\rho^*))$$

は最適である．

以下，

(11)　$n \geqq 5$

とし，

$$\eta_1 = (n - \sqrt{n^2-4n})/2 \quad , \quad \eta_2 = (n + \sqrt{n^2-4n})/2$$

とおいて，

(12)　$\eta_1 < \eta < \eta_2$

とする．$f(t) = n-t$ ，$g(t) = n/t$，$S(t) = g \circ f(t)$ とおけば，f，g は t の減少函数，S は t の増加函数で，η_1 ，η_2 は S の不動点で，

$$\eta_1 + \eta_2 = \eta_1 \eta_2 = n .$$

(12) は f，g ，S で範囲が不変．$\xi_0 = 2$ ，$\xi_{n+1} = S(\xi_n)$ ($n = 0, \pm 1, \cdots$) によって $\{\xi_n\}$ を定義する．(12) は範囲

$$\xi_{n+1} \leqq \eta \leqq \xi_n$$

の和集合となる．

つぎの３つの補助定理を準備する．

補助定理8. 最適な素材 $(n, \leqq, 2, \rho^*)$ が存在して,

(13) $2 \leqq \rho^* \leqq n/2$.

補助定理9. 最適な素材 (4) が存在して,

(14) $\eta_1 < \rho^* < \eta_2$.

補助定理10. 最適な素材 (4) は trivial でない均質な関係式によって実現される.

補助定理8を強化して,

補助定理11. 最適な素材 $(n, \leqq, 2, \rho^*)$ が存在して,

(15) $2 \leqq \rho^* < n/2$.

τ_0 を素材 $(5, \leqq, 2, 5/(2+\tau_0))$ が最適ということで定義する. $2 \leqq 5/(2+\tau_0) < 5/2$ から

(16) $0 < \tau_0 < \infty$.

$\{m_s\}$ $(s \geqq 0)$ を

(17) $m_0 = 5$, $m_{s+1} = 2(m_s - 2)$ $(s \geqq 0)$

で定義する, すなわち

$$m_s = 4 + 2^s \quad (s \geqq 0).$$

$\{\alpha_s\}$ $(s \geqq 0)$ を

(18) $\alpha_0 = 5/(2+\tau_0)$, $\alpha_{s+1} = (m_s-2)\alpha_s/(m_s-\alpha_s)$ $(\alpha \geqq 0)$

で定義する，すなわち

$$\alpha_s = (4+2^s)/(2+\tau_0\cdot 2^s) \quad (s \geqq 0)$$

であって

(19) $\alpha_s \longrightarrow 1/\tau_0$ $(s \to \infty)$.

各 s に対して，$r = r_s = m_s/2$ とおいて，$\{n_k\}$ を

(20) $n_0 = 2r$, $n_{k+1} = r(n_k - r)$ $(k \geqq 0)$

で定義する，すなわち

$$n_k = r^2/(r-1) + \beta r^k \quad (k \geqq 0),$$

ここに，β は

(21) $n_0 = r^2/(r-1) + \beta$

によってきめる．$\{\beta_k\}$ を

(22) $\beta_0 = 2r(1-1/\alpha_s)$, $\beta_{k+1} = (n_k - r)\beta_k/(n_k - \beta_k)$ $(k \geqq 0)$

で定義する，すなわち

$$\beta_k = (r^2/(r-1) + \beta r^k)/(r/(r-1) + \alpha r^k) \quad (k \geqq 0),$$

ここに，α は

(23) $\beta_0 = n_0/(r/(r-1)+\alpha)$

によってきめる．このとき，

(24) $\beta_k \longrightarrow \beta/\alpha$ $(k \to \infty)$.

また，

(25)　$\theta = (1-\tau_0)/\tau_0$

とおくと,

(26)　$1 \leqq \theta < \infty$

で

(27)　$\beta/(r\alpha) \to \theta \quad (s \to \infty)$.

つぎの　つの補助定理を準備する.

補助定理 12.　$(n, \leqq, 2, \rho_n)$ $(n \geqq 5)$ を最適な素材とすれば, $\rho_n \nearrow 1/\tau_0$.

補助定理 13.　$(n, \leqq, r, \rho_n)$ $(n \geqq 5)$ を最適な素材とすれば, $\rho_n \uparrow \beta/\alpha$.

補助定理 14.　$0 < \theta\varepsilon < 1$ かつ $(n, \leqq, 1/(1-\varepsilon), \rho^*)$ が最適であれば, $\rho^* \leqq 1/(1-\theta\varepsilon)$.

補助定理 15.　$(n, \leqq, r, \rho^*)$ が最適な素材とすれば, $\rho^* \leqq \theta r$.

補助定理 16.　$\theta = 1$.

以上の準備の下に，

補助定理 17. $\sum_{i=1}^{n} e_i \leqq \eta$ ならば $\sum_{i=1}^{n} D(e_i) \leqq \eta$.

§4. 定理の証明.

補助定理を 2 つ準備する.

補助定理 18. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \leqq \eta$ ならば $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i D(e_i) \leqq \eta$,
ここに, η は実数, $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ は正の実数, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ は射影元の系.

補助定理 19. $\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \| \leqq \varepsilon$ ならば $| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i D(e_i) | \leqq \varepsilon$,
ここに, $\varepsilon > 0$, $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ は実数の系, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ は射影元の系.

補助定理 19 を使って定理が証明できる.

定理の証明. A を II_1 型 AW^*-factor, F を A の restricted trace, $a, b \in H$ として

(28) $\qquad F(a+b) = F(a) + F(b)$

が証明できれば, F は trace になって定理の証明が終る.

さて，$\varepsilon > 0$ を与える．$a \in H$ に対し，実数の系 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ と射影元の系 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ がとれて

(29) $$\| a - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \| \leqq \varepsilon$$

かつ

(30) $$| F(a) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i D(e_i) | \leqq \varepsilon$$

ならしめうる．$b \in H$，$a+b \in H$ に対しても同様に，実数の系 $\{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$，$\{\gamma_1, \cdots, \gamma_r\}$，射影元の系 $\{f_1, \cdots, f_m\}$，$\{g_1, \cdots, g_r\}$ がとれて

(31) $$\| b - \sum_{j=1}^{m} \beta_j f_j \| \leqq \varepsilon$$

(32) $$| F(b) - \sum_{j=1}^{m} \beta_j D(f_j) | \leqq \varepsilon$$

(33) $$\| (a+b) - \sum_{k=1}^{r} \gamma_k g_k \| \leqq \varepsilon$$

(34) $$| F(a+b) - \sum_{k=1}^{r} \gamma_k D(g_k) | \leqq \varepsilon$$

ならめうる．(29)(31)(33) から

$$\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j f_j - \sum_{k=1}^{r} \gamma_k g_k \| \leqq 3\varepsilon,$$

補助定理 19 を使って

(35) $$| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i D(e_i) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j D(f_j) - \sum_{k=1}^{r} \gamma_k D(g_k) | \leqq 3\varepsilon .$$

(30)(32)(34)(35) から

$$| F(a) + F(b) - F(a+b) | \leqq 6\varepsilon .$$

$\varepsilon \downarrow 0$ ならしめて，(28) をうる．

§5. 補遺.

補助定理11を証明するためにつぎの補助定理が使はれる。

補助定理20. $xx^* \leqq x^*x \Longrightarrow xx^* = x^*x$.

補助定理21. $0 \leqq a \leqq b$ かつ $F(a) = F(b) \Longrightarrow a = b$

補助定理22. $F(e+f) = D(e) + D(f)$

補助定理23. $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ は射影元の系で

$$D(e_1) = D(e_2) = D(e_3) = D(e_4) = 1/2$$

かつ

$$e_1 + e_2 \leqq e_3 + e_4$$

ならば,

$$e_1 + e_2 = e_3 + e_4 .$$

以上