数理解析研究所講究録
第104巻 1970年 100-108

UHF-代数の変換群による実現について

九大 理　岡 幸正

§1. 序

作用素環を変換群と対応させて研究することは、これまでいろいろなされている。Murray と von Neumann は ergodic な変換群を用いて II 型、III 型の factor を構成した([6], [7])がその後 この technique が 作用素環論において重要な役割を果したことはよく知られている。特に Powers[9] は $\{2^n\}$型の UHF-代数のある product state に対応する表現による factor が Pukánszky [10] における III 型の factor と同型であること(Glimm [4]) を用いて III 型の factor の非可算存在を証明した。一方、Glimm [5] は locally compact な変換群が自然に C^* 代数をひきおこすことを示した。

ここでは、$\{p_n\}$型の UHF-代数が変換群(G, Z)に対応する[5]の意味の C^*-代数 $\mathfrak{A}(G, Z)$ と同型である。但し $G = \coprod_{k=1}^{\infty} G^{(k)}$, $Z = \prod_{k=1}^{\infty} Z^{(k)}$, $G^{(k)} = Z^{(k)}$ は位数 q_k ($q_1 = p_1$, $q_k = p_k/p_{k-1}$ $(k \geqq 2)$) の巡回群, こと

従って特に，$\{2^n\}$型の UHF-代数は[10]における変換群(G, Z)，即ち $G=\coprod_{k=1}^{\infty} G^{(k)}$，$Z=\prod_{k=1}^{\infty} Z^{(k)}$，$G^{(k)}=Z^{(k)}=\{0,1\}\ (k=1,2,\cdots)$に対応する$C^*$代数$\mathfrak{A}(G, Z)$と同型であることを述べよう．

§2．変換群C^*代数$\mathfrak{A}(G, Z)$の構成（Glimm [5], Effros-Hahn [2]）

(G, Z)をG, Zがそれぞれ locally compact, T_2, second countable であるような位相変換群とする．$C_0(G\times Z)$を$G\times Z$上の compact support をもつ複素数値連続関数全体とする．

$f, g\in C_0(G\times Z)$に対して $f*g$, $f^*\in C_0(G\times Z)$を次のように定義する：

$$f*g(t,\zeta) = \int f(s,\zeta)\, g(s^{-1}t, s^{-1}\zeta)\, ds$$

$$f^*(t,\zeta) = \overline{f(t^{-1}, t^{-1}\zeta)}\, \Delta(t^{-1})$$

ここに ds はG上の固定した左不変な Haar 測度，Δはその modular 関数である．$C_0(G\times Z)$は上の演算と普通の加法，スカラー積，および inductive limit topology に関して位相$*$-代数になる．次に$f\in C_0(G\times Z)$に対して norm $\|f\|$を次のように定義する：

$$\|f\| = \sup \|L(f)\| ,$$

ここに，Lは$C_0(G\times Z)$の Hilbert space 上への (weakly continuous で non-degenerate な表現全体をわたるとする．

1.2

$C_0(G\times Z)$の表現Lはすべて norm-decreasing 即ち,

$$\|L(f)\| \leqq \|f\|_0 , \quad \forall f \in C_0(G\times Z)$$

但し, $$\|f\|_0 = \int \|f(s,\cdot)\|_\infty \, ds$$

である. $C_0(G\times Z)$ の norm $\|f\|$ による completion $\mathfrak{A}(G,Z)$ を (G,Z) の変換群C^*代数という.

§3. UHF-代数の変換群による表現 ([8])

$Z^{(k)}$ $(k=1,2,\cdots)$ を compact Hausdorff space とし, $Z_n=\prod_{k=1}^{n} Z^{(k)}$, $Z=\prod_{k=1}^{\infty} Z^{(k)}$ とおく. X が compact Hausdorff space ならば X 上の連続関数全体のつくるC^*代数を $C(X)$ とかく. このとき

<u>補題1.</u> $C(Z) = C^*\lim_n C(Z_n) = \bigotimes_k C(Z^{(k)})$

正の整数nに対して M_n をn次複素行列全体のつくるC^*代数とする.

<u>補題2.</u> H を位数nの巡回群とする. このとき

$$\mathfrak{A}(H,H) \cong M_n$$

証明:

(H,H) は discrete 有限変換群で, $\mathfrak{A}(H,H) = C(H\times H)$. である. s をHの生成元, 即ち, $H=\{e, s, s^2, \cdots, s^{n-1}\}$ とする. $f\in C(H\times H)$に対して,

$$\alpha_{k,l} = f(s^{l-k}, s^{1-k}) \qquad (k, l = 1, 2, \cdots, n)$$

とし，

$$T_f = (\alpha_{k,l})_{k,l}$$

とおく．写像 T は $C(H \times H)$ から M_n の上への principal $*$-isomorphism である．従って

$$\mathfrak{A}(H, H) \cong M_n .$$

証明終．

注：H が無限巡回群ならば，$\mathfrak{A}(H,H) \cong LC(\mathfrak{H})$，separable Hilbert space $\mathfrak{H}$ 上の完全連続作用素全体，であることも同様に証明できる．

次に $G^{(k)}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ を位数 q_k の巡回群とし，$Z^{(k)} = G^{(k)}$，$G_n = \prod_{k=1}^{n} G^{(k)}$，$Z_n = G_n$ とする．但し q_k は正の整数，このとき，

<u>補題 3.</u> $\mathfrak{A}(G_n, Z_n) \cong \bigotimes_{1 \leq k \leq n} \mathfrak{A}(G^{(k)}, Z^{(k)})$

証明：

$\bigotimes_{1 \leq k \leq n} \mathfrak{A}(G^{(k)}, Z^{(k)})$ から $\mathfrak{A}(G_n, Z_n)$ への線型写像 λ_n を次のように定義する：任意の $\bigotimes_{1 \leq k \leq n} f^{(k)} \in \bigotimes_{1 \leq k \leq n} \mathfrak{A}(G^{(k)}, Z^{(k)})$ に対して，

$$\lambda_n\Big(\bigotimes_{1 \leq k \leq n} f^{(k)}\Big)(s^{(1)}, \cdots, s^{(n)}; \zeta^{(1)}, \cdots, \zeta^{(n)}) = \prod_{k=1}^{n} f^{(k)}(s^{(k)}, \zeta^{(k)}) .$$

この写像 λ_n は onto, principal $*$-isomorphism である．

証明終．

補題2，3によって

<u>補題4.</u>　$\mathfrak{A}(G_n, Z_n) \cong M_{p_n}$　（但し　$p_n = q_1 q_2 \cdots q_n$）

$\mathfrak{A}$を単位元をもつC^*代数とする．$\mathfrak{A}$が$\{p_n\}$型のuniformly hyperfinite (UHF) algebraであるとは　(i)　$p_n \uparrow \infty$ $(n \to \infty)$, $p_n \mid p_{n+1}$　(ii)　$\mathfrak{A} = C^*\text{-}\lim\limits_n M_{p_n}$　である正の整数$\{p_n\}$が存在することをいう．（Glimm [3]）

補題3におけると同様に$G^{(k)} = Z^{(k)}$ $(k=1,2,\cdots)$を位数q_kの巡回群，$e^{(k)}$を$G^{(k)}$の単位元とし，$G_n = Z_n = \prod_{k=1}^{n} G^{(k)}$ $(n=1,2,\cdots)$とする．また，Gを$G^{(k)}$のrestricted direct product　即ち

$$G = \coprod_{k=1}^{\infty} G^{(k)} = \{ (s^{(k)})_{k=1,2,\cdots} : s^{(k)} \in G^{(k)}, \text{有限個の} k \text{を除いて} s^{(k)} = e^{(k)} \}$$

とし，$Z = \prod_{k=1}^{\infty} Z^{(k)}$とする．このとき

<u>定理1.</u>
$$\mathfrak{A}(G, Z) \cong C^*\text{-}\lim_n \mathfrak{A}(G_n, Z_n) \cong \bigotimes_k \mathfrak{A}(G^{(k)}, Z^{(k)})$$

従って　$\mathfrak{A}(G, Z)$は$\{p_n\}$型のUHF-代数である．

但し　$p_n = q_1 q_2 \cdots q_n$　$(n=1,2,\cdots)$．

証明：

$0 < m \leqq n$である任意の整数m, nに対して，$\mathfrak{A}(G_m, Z_m)$から$\mathfrak{A}(G_n, Z_n)$の中へのcanonical imbedding ϕ_{nm}を次のように定義する：

$$\phi_{nm}(f)(s^{(1)},\cdots,s^{(n)};\zeta^{(1)},\cdots,\zeta^{(n)})$$
$$= f(s^{(1)},\cdots,s^{(m)};\zeta^{(1)},\cdots,\zeta^{(m)})\prod_{k=m+1}^{n}\delta_{e(k)}(s^{(k)})$$

ここに $f\in\mathfrak{A}(G_m,Z_m)$, $(s^{(1)},\cdots,s^{(n)})\in G_n$, $(\zeta^{(1)},\cdots,\zeta^{(n)})\in Z_n$.

ϕ_{nm} は principal $*$-isomorphism で

$$\phi_{nl}=\phi_{nm}\phi_{ml}\quad(l\leq m\leq n)$$

をみたす．従って $C^*\text{-}\lim_n \mathfrak{A}(G_n,Z_n)$ が存在する．([11])

次に，$\mathfrak{A}(G_m,Z_m)$ から $\mathfrak{A}(G,Z)$ の中への canonical imbedding ϕ_m を

$$\phi_m(f)(s^{(1)},s^{(2)}\cdots;\zeta^{(1)},\zeta^{(2)},\cdots)$$
$$= f(s^{(1)}\cdots,s^{(m)};\zeta^{(1)},\cdots\zeta^{(m)})\prod_{k\geq m+1}\delta_{e(k)}(s^{(k)})$$

ここに，$f\in\mathfrak{A}(G_m,Z_m)$，$(s^{(k)})\in G$，$(\zeta^{(k)})\in Z$，

によって定義する．ϕ_m は principal $*$-isomorphism で

$$\phi_m=\phi_n\phi_{nm}\qquad(m\leq n)$$

をみたす．従って $\phi_m(\mathfrak{A}(G_m,Z_m))\subseteq\phi_n(\mathfrak{A}(G_n,Z_n))$ $(m\leq n)$

もし $C_0(G\times Z)\subseteq\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty}\phi_m(\mathfrak{A}(G_m,Z_m))}$: $\mathfrak{A}(G,Z)$ における norm $\|\cdot\|$-closure，がわかれば，$\mathfrak{A}(G,Z)$ $=\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty}\phi_m(\mathfrak{A}(G_m,Z_m))}$ 従って，

$$\mathfrak{A}(G,Z)\cong C^*\text{-}\lim_n\mathfrak{A}(G_n,Z_n)\qquad(\text{Takeda [11]})$$

$C_0(G\times Z)$ の元は $\sum_{i=1}^{l}\delta_{s_i}h_i$，$s_i\in G$，$h_i\in C(Z)$ の形だから，任意の $s\in G$，$h\in C(Z)$ に対して，

$$\delta_s h \in \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \Phi_m(\mathfrak{A}(G_m, Z_m))}$$

を示せばよい．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$s = (s^{(1)}, \cdots, s^{(n)}, e^{(n+1)}, e^{(n+2)}, \cdots)$$

$$\| \psi_n(g) - h \|_\infty < \varepsilon$$

である正の整数 n と $g \in C(Z_n)$ が存在する．ここに ψ_n は $C(Z_n)$ から $C(Z)$ の中への canonical imbedding である．$f \in C(G_n \times Z_n) = \mathfrak{A}(G_n, Z_n)$ を次のように定義する：

$$f(t^{(1)}, \cdots, t^{(n)}; \zeta^{(1)}, \cdots, \zeta^{(n)}) = g(\zeta^{(1)}, \cdots, \zeta^{(n)}) \prod_{k=1}^{n} \delta_{s^{(k)}}(t^{(k)})$$

このとき $\Phi_n(f) = \delta_s \psi_n(g) \in \Phi_n(\mathfrak{A}(G_n, Z_n))$ で，

$$\| \Phi_n(f) - \delta_s h \| < \varepsilon$$

従って $\delta_s h \in \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \Phi_m(\mathfrak{A}(G_m, Z_m))}$ 即ち

$$\mathfrak{A}(G, Z) \cong C^*\text{-}\lim \mathfrak{A}(G_n, Z_n).$$

補題4によって $\mathfrak{A}(G_n, Z_n) \cong M_{p_n}$ だから $\mathfrak{A}(G, Z)$ は $\{p_n\}$ 型の UHF-代数である．また補題3によって，

$$\mathfrak{A}(G, Z) \cong \bigotimes_k \mathfrak{A}(G^{(k)}, Z^{(k)})$$

を得る．　　　　　　　　　　　　　　　　証明終．

逆に $\mathfrak{A}$ を $\{p_n\}$ 型の UHF-代数とする．$q_1 = p_1$，$q_k = p_k / p_{k-1}$ $(k = 2, 3, \cdots)$ とし，$G^{(k)}, Z^{(k)}, G_n, Z_n$，$G, Z$ を上のようにとる．このとき

定理2. $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}(G, Z)$

証明：

UHF-代数の定義，C*-inductive limit の定義([11]) および，補題3，定理1によって明らかである．

証明終．

以上．

文 献

[1] J. Dixmier, Les C*-algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[2] E. G. Effros and F. Hahn, Locally compact transformation groups and C*-algebras, Memoirs of the Amer. Math. Soc., 75(1967).

[3] J. Glimm, On a certain class of operator algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 95(1960), 318-340.

[4] J. Glimm, Type I C*-algebras, Ann. of Math., 73(1961), 572-612.

[5] J. Glimm, Families of induced representations, Pacific J. Math., 12(1962), 885-911.

[6] F. J. Murray and J. von Neumann, On rings of operators, Ann. of Math., 37(1936), 116-229.

[7] J. von Neumann, On rings of operators III, Ann. of Math., 41(1940), 94-161.

[8] Y. Oka, A characterization of uniformly hyperfinite algebras, (to appear).

[9] R. T. Powers, Representations of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann rings, Ann. of Math., 86(1967), 138-171.

[10] L. Pukánszky, Some examples of factors, Publ. Math. Debrecen, 4(1955-56), 135-156.

[11] Z. Takeda, Inductive limit and infinite direct product of operator algebras, Tohoku Math. J., 7(1955), 67-86.