数理解析研究所講究録
第105巻 1971年 58-74



# 有界な解 と 安定な領域

都立大 理 岩野正宏

## §1 境界層の方程式 と P.Hartman の結果

ここ数年間 有界な解の作り方に興味をもってきました。それらの研究の出発点は 境界層の方程式

$$(1.1)\quad f''' + ff'' + \lambda(k^2 - f'^2) = 0 \qquad \lambda < 0,\ k > 0$$

$$(1.2)\quad f(0) = 0,\ f'(0) = 0,\ f'(\infty) = k \qquad \left({}' = \frac{d}{dt}\right)$$

に関する次の二つの問題である。

境界値問題 (1.1)−(1.2) の解が存在するか？

もしそのような解 $f(t)$ が存在すれば，解は $t \to \infty$ のとき どんな行動をするか？

大域的な解の存在については，$0 < f'(t) < k$ $(0 < t < \infty)$ の制限のもとに，次の定理が知られている。$k = 1$ としても一般性を失わないことを注しておく。「境界条件

$$(1.3)\quad f(0) = \alpha,\ f'(0) = \beta, \qquad f'(\infty) = 1$$

を考えれば，固定された $\lambda<0$ と $0\leqq\beta<1$ とに対して，適当な数 $A(\lambda,\beta)$ と 連続な増加関数 $\gamma(\alpha)$ ── $\alpha\geqq A(\lambda,\beta)$ かつ $\alpha=A(\lambda,\beta)$ のとき $\gamma(\alpha)=0$ ── とが存在して $\alpha\geqq A(\lambda,\beta)$ かつ $0\leqq f''(0)\leqq\gamma(\alpha)$ であるときに限り，初期条件 $t=0:(\alpha,\beta,f''(0))$ を満足する(1.1)の解は $\infty$ まで接続でき しかも $f'(\infty)=1$」

この定理から，「境界値問題(1.1)-(1.3)は $\alpha=A(\lambda,\beta)$ のとき ただ一つの解をもち，$\alpha<A(\lambda,\beta)$ のとき解は存在しなく，また $\alpha>A(\lambda,\beta)$ のとき $f''(0)$ は区間 $[0,\gamma(\alpha)]$ 内の任意の値をとれるから 解は1パラメーターの族をつくる」ことがわかる。もちろん $0<f'(t)<1\ (0<t<\infty)$.

もし $A(\lambda,\beta)\leqq0$ であることがわかれば 境界値問題(1.1)-(1.2)は解けたことになる。しかし $A(\lambda,\beta)$ の決め方は constructive ではないので，$A(\lambda,\beta)$ の符号はわからない。したがって 境界値問題(1.1)-(1.2)は open problem と思われる。

P. Hartman は (1.1)-(1.3) の解の $t\to\infty$ のときの漸近的な行動を研究した。それによると「$f'(t)\to1\ (k=1)$ となる二つの型の(1.1)-(1.3)の解がある。一つは $f'(t)$ の1への近づき方が指数関数の order，すなわち

$$\left.\begin{aligned} 1-f'(t)&\simeq c_0\,t^{-1-2\lambda}\exp\left(-\tfrac{1}{2}t^2-c_1t\right)\\ f''(t)&\simeq t\,(1-f'(t))\end{aligned}\right\}\quad (t\to\infty)$$

$(c_0 > 0,\ c_1$ は 定数),

もう一つは $f'(t)$ の $1$ への近づき方が $t$ の冪の order,
すなわち

$$1 - f'(t) \cong c_0 t^{2\lambda}, \qquad f''(t) \cong -2\lambda c_0 t^{-1+2\lambda} \quad (t \to \infty)$$

$$(c_0 > 0)$$

となる二つの型の解がある」

すでに述べたように $A(\lambda, \beta) \leqq 0$ となり得るかどうかの判定は将来の研究に待たねばならない。一方 谷 一郎氏の予想によれば「$\lambda < 0$ のとき (1.1)−(1.2) の解は $f''(0)$ の値をどのように選んでも存在する。ただ $f''(0)$ が或る特定の値をとるとき $f'(t)$ は $t \to \infty$ のとき最もはやく $1$ に近づき ($f'(t) - 1$ は指数関数の order で $0$ に近づく), その他の $f''(0)$ の値に対しては $f'(t)$ は $t \to \infty$ のときもっとゆっくり $1$ に近づく ($f'(t) - 1$ は冪の order で $0$ に近づく)」.

## §2 不確定型特異点の理論の応用

P. Hartman 氏の研究と谷氏の予想とから,「方程式 (1.1) の $\infty$ の近くでの解で, $t \to \infty$ のとき $f'(t) \to k$ となるものは二つの任意定数を含むことが期待される. そのような解の解析的な表現を求める問題を考える。

(1.1) は独立変数を陽に含んでいないことを利用して, (1.1) を

2階の方程式に変換する。すなわち

$$f''=f'\frac{df'}{df}=\frac{1}{2}\frac{d(f'^2)}{df},\quad f'''=\frac{df''}{dt}=\frac{1}{2}f'\frac{d^2(f'^2)}{df^2}$$

であるから，$f$ を独立変数，

$$g(f)=f'^2$$

を従属変数にとると，(1.1)は 2階の方程式

(2.1) $$\sqrt{g}\,\ddot{g}+f\dot{g}+2\lambda(k^2-g)=0 \qquad \left(\dot{}=\frac{d}{df}\right)$$

になる。条件 $f'(\infty)=k$ は

$$g(\infty)=k^2$$

となる。$f\to\infty$ のとき $g\to k^2$ となる(2.1)の解の展開式をつくるために，

(2.2) $$\begin{cases} g(f)=k^2+h(x), & x=\dfrac{1}{f} \\ u=h, & v=xh' \end{cases}$$

とおけば，(2.1)は連立方程式になる:

(2.3) $$\begin{cases} x^3u'=x^2v \\ x^3v'=\dfrac{2\lambda}{k}u+\left(\dfrac{1}{k}-x^2\right)v+\dfrac{1}{k}a\left(\dfrac{u}{k^2}\right)(v+2\lambda u) \end{cases}$$

$$a(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}-1$$

方程式(2.3)の右辺の $u,v$ に関する2次以上の項を無視すれば(2.3)は $x=0$ を不確定特異点とする方程式にな

る。福原-Turrittin の理論を応用して その線型方程式をある標準の形に変換する。すなわち

$$(2.4)\quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2\lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & kx^2 \\ 2\lambda k(2\lambda-1)x^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}$$

とおけば 方程式(2.3)は その線型の部分を標準形にもつ方程式に変換される:

$$(2.5)\quad \begin{cases} x^3 y' = \left(\frac{1}{k} + (2\lambda-1)x^2\right) y + A(x)y + B(x)z + \sum\limits_{j+k\geq 2}'' a_{jk}(x) y^j z^k \\ x z' = -2\lambda z + C(x)y + D(x)z + \sum'' b_{jk}(x) y^j z^k . \end{cases}$$

係数 $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$, $a_{jk}(x)$, $b_{jk}(x)$ はすべて $x=0$ において正則な関数, 右辺の級数は $|x|, |y|, |z|$ の小さい値に対して収束する。 とくに

$$A(x) = O(x^4),\quad B(x) = O(x^4),\quad C(x) = O(x^2),\ D(x) = O(x^2)$$

の形の order 条件が満足されている。(2.5)に対し 福原先生の形式変換の理論を応用すれば,

$$(2.6)\quad \begin{cases} y \sim U(x) + \sum' P_{jk}(x)\, U(x)^j\, V(x)^k \\ z \sim V(x) + \sum' Q_{jk}(x)\, U(x)^j\, V(x)^k \end{cases}$$

$$U(x) = C_1\, x^{2\lambda-1}\, e^{-\frac{1}{2kx^2}},\qquad V(x) = C_2\, x^{-2\lambda}$$

の形の 二つの助変数 $C_1, C_2$ を含む形式解が得られる。係数 $P_{jk}(x)$, $Q_{jk}(x)$ は, 線型方程式を満足し, 角領域

$$-\frac{\pi}{4} < \arg x < \frac{3\pi}{4}, \quad 0 < |x| < a_0$$

または

$$-\frac{3\pi}{4} < \arg x < \frac{\pi}{4}, \quad 0 < |x| < a_0$$

において一価正則しかも $x \to 0$ のとき $x$ の整級数へ漸近展開可能な，解として一意的に決まる。ついでに

$$P_{10}(x) = O(x^4),\ P_{01}(x) = O(x^4),\ Q_{10}(x) = O(x^4),\ Q_{01}(x) = O(x^2)$$

となることを注意しておく。

級数(2.6)の収束性が問題となる。　最近の筆者の研究によると「級数解(2.6)は　$x$, $U(x)$, $V(x)$　が

$$-\frac{\pi}{4} < \arg x < \frac{3\pi}{4},\ 0 < |x| < a_1,\ |U(x)| < b_1,\ |V(x)| < b_1$$

または

$$-\frac{3\pi}{4} < \arg x < \frac{\pi}{4},\ 0 < |x| < a_1,\ |U(x)| < b_1,\ |V(x)| < b_1$$

の形の不等式を満足すれば収束であり，和は方程式(2.5)の一つの一般解になる」ことが証明できる。こうして得られた解は二つの助変数を含む。

(2.2) および (2.4) 式に注意して，$C_2 = 0$ または $C_1 = 0$ とおけばそれぞれ

$$g(f) = k^2 + C_1 (k + O(x^2)) e^{-\frac{1}{2kx^2}} x^{2\lambda+1}$$

または

$$g(f) = k^2 + C_2 (1 + O(x^2)) x^{-2\lambda}$$

となる形の漸近式が得られる。 これらに対応する (1.1) の解は $t$ の十分大きいところで定義され しかも $t\to\infty$ のとき $f'(t)\to k$ となる。

## §3 不確定型特異点をもつ方程式

方程式 (2.5) よりも もう少し一般な形の方程式

(3.1) $\quad x^{\sigma+1}y' = f(x,y,z), \quad xz' = g(x,y,z)$

を考える，ここで 次の仮定をおく：

i) $\sigma>0$ は整数， $x$ は複素変数，$y$ は $m$ 次のベクトル，$z$ は $n$ 次のベクトル。

ii) $f$ は $m$ 次のベクトル，$g$ は $n$ 次のベクトル，それらの成分は $(x,y,z)$ の関数として

$$|x|\leqq a, \quad \|y\|\leqq b, \quad \|z\|\leqq b$$

において 一価正則な関数，しかも $(0,0,0)$ における値はすべて $0$。ノルムはベクトルのノルム。

iii) Jacobi 行列 $f_y(0,0,0)$ は non-singular，しかも下三角型の Jordan 標準形をもつ．

仮定 iii) から，もし必要であれば簡単な1次変換を行うことによって，次のことを仮定しても一般性を失わない：

$$f_z(0,0,0)=0, \quad f_x(0,0,0)=0$$

$$g_y(0,0,0)=0$$

$f_z$, $f_x$, $g_y$ は それぞれ $f$ の $z$, $f$ の $x$, $g$ の $y$ に関する Jacobi 行列である. $f(x,y,z)$ と $g(x,y,z)$ とが上記の仮定を満足するとき, さらに次の仮定をおく:

iv) Jacobi 行列 $g_z(0,0,0)$ は 下三角型の Jordan 標準形をもち, $n$ 個の 固有値 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ の実部は すべて正である。

福原先生の形式変換の理論を応用すれば, 方程式(3.1)は

$$(3.2)\quad y\sim\sum_{q}\Phi(x)^{q}A_{q}(x)\ ,\qquad z\sim\sum_{q}\Phi(x)^{q}B_{q}(x)$$

の形の形式解をもつことがわかる. $A_q(x)$, $B_q(x)$ は線型 ($q\neq 0$) または非線型 ($q=0$) 方程式の解で, しかもその解は, $x$ 平面の正の実軸(原点の近く)を含むある角領域において一価正則で $x\to 0$ のとき $x$ の整級数へ漸近展開可能なものとして, 一意的に決まる. この角領域は行列 $f_y(0,0,0)$ の固有値の偏角から決まる. ここで

$$\Phi(x)^{q}=\varphi_1(x)^{q_1}\varphi_2(x)^{q_2}\cdots\varphi_n(x)^{q_n}\ ,$$

$\varphi_k(x)$ は $n$ 次のベクトル $\Phi(x)$ の第 $k$ 成分で

$$(3.3)\quad \varphi_k(x)=x^{\mu_k}\{C_k+(\log x,\ C_1,\cdots,C_{k-1}\ の多項式)\}$$

($C_1, \ldots, C_n$ は任意定数，$\mu_1, \ldots, \mu_n$ は $g_z(0,0,0)$ の固有値)

の形をもち，$\Phi(x)$ は simplified equations (Reduced equations)

(3.4) $$x v' = (1_n(\mu) + D) v + \sum_{l,k} x^l v^k b_{lk}$$

$$1_n(\mu) = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \varepsilon_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \varepsilon_n & 0 \end{bmatrix} \quad b_{lk} = \begin{bmatrix} b_{1,lk} \\ \vdots \\ b_{n,lk} \end{bmatrix}$$

の一般解である．$\{(l,k)\}$ は有限集合をつくり

$$b_{k,lk} \neq 0 \Rightarrow \mu_k = l + \mu_1 k_1 + \cdots + \mu_n k_n$$

という条件が満足されている．

問題は形式解の収束の証明である．形式解の収束とは，「係数ベクトル $A_\xi(x)$，$B_\xi(x)$ の定義されている角領域を

(3.5) $$\underline{\Theta} < \arg x < \overline{\Theta}, \quad 0 < |x| < a_0$$

とすれば適当な $\underline{\Theta}'$，$\overline{\Theta}'$，$a'$，$b'$ ($\underline{\Theta} \leq \underline{\Theta}'$，$\overline{\Theta}' \leq \overline{\Theta}$) とがあって $x$ と $\Phi(x)$ とが不等式

(3.6) $$\underline{\Theta}' < \arg x < \overline{\Theta}', \quad 0 < |x| < a', \quad \|\Phi(x)\| < b'$$

を満足すれば級数(3.2)は一様に収束しその和は真の解を表わす」ということである．もちろん角領域 $\underline{\Theta}' < \arg x < \overline{\Theta}'$ は $x$ 平面の正の実軸を含まねばならない。実は $\underline{\Theta}' = \underline{\Theta}$，$\overline{\Theta}' = \overline{\Theta}$ ととれる。

## §4　収束の証明についての注意

収束の証明には　優級数法や不動点法　が用いられる。この問題に関しては　不動点法の方がすぐれているように思われる。その理由を説明する。

形式解(3.2)が　(3.6)において　収束すれば，正数$M$　と $b'$ とが存在して，不等式

$$(4.1)\quad \|A_q(x)\|, \|B_q(x)\| \leq \frac{M}{b'^{|q|}} \qquad (|q| = q_1 + \quad + q_n)$$

が　すべての　$q = (q_1, \ldots, q_n)$　と　すべての　$x$; $\underline{\Theta}' < \arg x < \overline{\Theta}'$, $0 < |x| < a'$　とに対して　成り立つ筈である。

しかし　不等式(4.1)を直接に証明することは　むづかしいように思われる。実際，直接に証明できることは「区間 $\underline{\Theta} \leqq \varphi \leqq \overline{\Theta}$ —— $\underline{\Theta}' = \underline{\Theta}$, $\overline{\Theta}' = \overline{\Theta}$ととる —— において定義された　正値連続関数 $\omega(\varphi)$ と $\chi_1(\varphi)$, , $\chi_n(\varphi)$とを適当にとれば　すべての　$q = (q_1, \ldots, q_n)$　に対して

$$(4.2)\ \|A_q(x)\|, \|B_q(x)\| \leqq \frac{M}{(b_1''\chi_1(\arg x))^{q_1} \cdots (b_n''\chi_n(\arg x))^{q_n}}$$

の形の不等式が　角領域

$$(4.3)\quad \underline{\Theta} < \arg x < \overline{\Theta}, \quad 0 < |x| < a''\omega(\arg x)$$

において成り立つ。$M$, $a''$, $b_1''$, , $b_n''$ は適当な正の数。」作り方から　わかることであるが，$\min\limits_{\varphi}\{\min\limits_{k}\{\chi_k(\varphi)\}\} < 1$

となる。したがって，上記の定理から「もし $n$ 個の関数 $x_1(\varphi), \ldots, x_n(\varphi)$ を定数でおきかえれば，$b_1'', \ldots, b_n''$ に対応する量は $1/|\xi|$ とともに $0$ に近づく」ことがわかる。最初から (4.1) の形の不等式を証明しようとすれば，たとえそれが可能であったとしても，角領域 ⓐ$<\arg x<$ⓑ をそれよりも小さい角領域 ⓐ$''<\arg x<$ⓑ$''$ でおきかえねばならなくなる。ところで優級数法でこのような関数 $x_k(\varphi)$ をみつけることは多々不自然であるが，不動点法を用いれば §5 で説明するようにこのような関数 $x_k(\varphi)$ を考えれば収束の証明に都合がよいことが極めて自然にわかる．実はこの不動点法による収束の証明の核心を優級数法でいえば (4.2) が (4.3) において成り立つように上記の関数 $x_k(\varphi)$ がとれる（または $x_k(\varphi)$ を用いれば (4.2) が (4.3) において成り立つ）ということになる。

関数 $\omega(\varphi)$ は，すでに，福原先生の存在定理の証明のなかに現われている。線型方程式の解の漸近展開の概念は Poincaré によって導入され，それを一般の線型方程式（いわゆる右辺の leading coefficients のつくる行列の固有値に対して特別な仮定を置かない）に拡張したのは Trjitzinski，そして解の漸近展開の有効な角領域を拡げたのは Malmquist である。福原先生は，不動点法を用いて角領域の半径方向の境界

$|x| = a'' \omega(\arg x)$ を適当に決れば 角領域の開きを さらに拡げれる ことを証明した。その結果は 漸近展開の有効な範囲についての一般的な存在定理のうち最も完全なものと思われる。

関数 $\chi_k(\varphi)$ を具体的に作ったのは筆者ですが，このような関数を使えば 解の存在定理の記述に都合がよい（すなわち 一般的な存在定理）ということは， Ljapunov, Perron, Hartman，福原，南雲…など 著名な方々による 解の存在定理の教えるところである とくに (3.2) の右辺に $\log x$ な項が含まれない場合には，すなわち

$$\varphi_k(x) = C_k x^{\lambda_k}$$

に対しては， $\omega$ と $\chi_k$ とを次のようにとることができる：

$$(4.4) \qquad \omega(\varphi) = \exp \int_{\theta^*}^{\varphi} \cot a(\tau)\, d\tau$$

$$(4.5) \qquad \chi_k(\varphi) = \exp\left\{(\mathrm{Re}\, \lambda_k)\int_{\theta^*}^{\varphi} \cot a(\tau)\, d\tau + (\mathrm{Im}\, \lambda_k)(\theta^* - \varphi)\right\}$$

$\theta^*$ は $[\underline{\Theta}, \overline{\Theta}]$ に属する任意の値， $a(\varphi)$ は $[\underline{\Theta}, \overline{\Theta}]$ において定義された 区分的連続—$\varphi$ の1次関数— しかも $0 < a(\varphi) < \pi$ を満足する 関数である。（福原先生の存在定理は，このような $a(\varphi)$ をどのようにして作るかという問題の証明 に帰着する。）

## §5 安定な領域

表題にある安定な領域を説するために，最も簡単な場合 $m=n=1$，$g=\mu z$ を考える：

$$(5.1)\qquad xy'=f(x,y,z),\qquad xz'=\mu z$$

あとの方程式はすでに解けているから，まえの方程式だけを考える．それの形式解として

$$(5.2)\qquad y\sim\sum(Cx^{\mu})^{q}A_{q}(x)$$

の形のものがある．$A_q(x)$ の漸近展開可能な角領域は

$$\frac{1}{\sigma}\left(-\frac{\pi}{2}+\arg\nu\right)+\varepsilon<\arg x<\frac{1}{\sigma}\left(\frac{5\pi}{2}+\arg\nu\right)-\varepsilon,\ 0<|x|<a_0$$

となる $\varepsilon>0$ は十分小さい数，$\nu=f_y(0,0,0)$．

形式解 (5.2) の収束性を論ずるために

$$(5.3)\qquad y=\sum_{q=0}^{N-1}A_q(x)\left((Cx^{\mu})^{q}\right)+Y,\qquad Y=e^{\Lambda(x)}\eta$$

$$\Lambda(x)=-\frac{\nu}{\sigma x^{\sigma}}$$

の形の変換を行って，従属変数を $y$ から $\eta$ へかえると，$\eta$ に関する方程式は次の形に書ける

$$(5.4)\qquad \eta'=x^{-\sigma-1}H(x,Cx^{\mu},e^{\Lambda(x)}\eta)\,e^{-\Lambda(x)}.$$

$H$ は 3 変数の関数．この方程式が $\eta=O\left(\left((Cx^{\mu})\right)^{N}e^{-\Lambda(x)}\right)$ を満足する解をもつことを期待して，関数族 $\mathcal{F}$ としては，

$\Gamma(x,z)$ の関数として 領域

$$(5.5)\quad \begin{cases} \frac{1}{\sigma}\left(-\frac{\pi}{2}+\arg\nu\right)+\varepsilon < \arg x < \frac{1}{\sigma}\left(\frac{5\pi}{2}+\arg\nu\right)-\varepsilon \\ 0<|x|<a_0' , \quad |z|<b_0' \end{cases}$$

に おいて正則 しかも 不等式

$$(5.6)\qquad |\phi(x,z)| \leqq K|z|^N e^{-\mathrm{Re}\Lambda(x)}$$

を満足する関数 $\phi(x,z)$ の全体から成る族をとる.

領域(5.5)から任意の点 $(x_1,z^1)$ をとりだし, 積分定数 $C$ を $z^1=Cx_1^{\mu}$ (多価関数 $x^{\mu}$ の分枝は適当にきめる) となるように決める. (5.4) の右辺の $\eta$ を $\phi(x,Cx^{\mu})$ で置き換え, 原点から $x_1$ まで適当な曲線 $\Gamma_{x_1}$ に沿って積分する. 積分されたものは $C$ を通して $(x_1,z^1)$ の関数となるから, それを $\bar\phi(x_1,z^1)$ と書く:

$$(5.7)\quad \bar\phi(x_1,z^1)=\int_0^{x_1} x^{-\sigma-1}H(x,Cx^{\mu},e^{\Lambda(x)}\phi(x,Cx^{\mu}))e^{-\Lambda(x)}dx.$$

$\phi(x,z)$ に $\bar\phi(x,z)$ を対応させる写像を $\mathcal{T}$ と書く. 「この $\mathcal{T}$ に不動点があり, その不動点に対応する $\mathcal{F}$ の要素を $\phi_N(x,z)$ と書くとき $\eta=\phi_N(x,Cx^{\mu})$ は (5.4)の解である」 ことを証明できれば, このことから形式解(5.2) の収束が結論される

対応 $\mathcal{T}$ が写像として意味をもつためには, (5.7) の右辺の被積分関数は $x\in\Gamma_{x_1}$ の正則関数でなければならない.

ただし $x \neq 0$. そのためには $x \in \Gamma_{x_1}$ に対して不等式

(5.8) $$|Cx^A| < b_0'$$

が満足されねばならない. 一方 $x=0$ は不確定型特異点であるから, $s$ を原点から $\Gamma_{x_1}$ に沿って測られた $\Gamma_{x_1}$ 上の任意の点 $x$ までの曲線の弧の長さとするとき,

(5.9) $$\frac{d}{ds} e^{-Re\,\Lambda(x)} \geq \frac{A}{|x|^{\sigma+1}} e^{-Re\,\Lambda(x)}$$

の形の不等式が成り立つように $\Gamma_{x_1}$ を決めねばならない。$A>0$ は $x_1$ および $z^1$ に無関係な定数. しかし, (5.5) のなかの $x$ の属する角領域をもっと狭い角領域でおきかえない限り, (5.8) は成り立たないことが簡単な計算でわかる. そうすると新しい角領域は, (境界層の方程式の場合のように) $\arg \nu = 0$ となるとき, $x$ 平面の正の実軸を含み得ないという不都合が生ずる. そこで「不等式

$$0<|x|<a_0', \qquad |z|<b_0'$$

を

$$0<|x|<a''\omega(\arg x), \qquad |z|<b''\chi(\arg x)$$

の形の不等式でおきかえるならば, すなわち (5.5) のかわりに領域

(5.10) $$\begin{cases} \frac{1}{\sigma}\left(-\frac{\pi}{2}+\arg\nu\right)+\varepsilon < \arg x < \frac{1}{\sigma}\left(\frac{5\pi}{2}+\arg\nu\right)-\varepsilon \\ 0<|x|<a''\omega(\arg x), \qquad |z|<b''\chi(\arg x) \end{cases}$$

を考えるならば 上記の $\Gamma_{x_1}$ の上を $x$ が動くとき，
(5.8) のかわりに 不等式

(5.11) $$|Cx^{A}|<b''\chi(\arg x)$$

が成り立つ」 ことを証明できる。そうすれば (5.7) の被積分関数は $x\in\Gamma_{x_1}$ $(x\neq 0)$ の正則関数である。$\omega$ および $\chi$ は (4.4) および (4.5) で与えられる。一般の場合は参考文献 [8] を参照。 さて (5.11) は，「方程式 $xz'=Az$ の一般解 $z=Cx^{A}$ の値は，その初期値が領域 (5.10) に属するならば $x$ が (5.9) を満足するような $\Gamma_{x_1}$ の上を動くとき，つねに<u>同じ領域</u> (5.10) 内に <u>とどまっている</u>」ことを示す。これとは反対に，(5.8) を用いるときは，「初期値は領域 (5.10) にはいっていても 必ずその領域から解は 外にでる」ということが起る。不等式 (5.9) の重要性と 解がある定まった近傍に<u>とどまっていること</u> とを強調するために，
領域 (5.10) を <u>simplified equation</u> $xz'=Az$ <u>の一般解の単項式</u> $\Lambda(x)$ <u>に関する</u> <u>安定な領域</u> それから $\chi$ を <u>mysterious function(s)</u> と呼ぶことにする。

形式解を表わす級数の係数が定数の場合は 優級数法による収束の証明は わかりやすいように思う。なお (5.2) の収束の証明を 逐次近似法を用いても証明できる。それの計算

は不動点法よりももっと複雑になる。

## 参考文献

[1] Intégration analytique d'un système d'équations différentielles non linéaires dans le vosinage d'un point singulier I, Ann Mat Pura Appl 44(1957), 261-292

[2] Intégration analytique d'un système d'équations différentielles non linéaires dans le vosinage d'un point singulier II, Ibid 47(1959)91-150.

[3] A method to construct analytic expressions for bounded solutions of nonlinear ordinary differential equations with an irregular singular point. F.E.10(1967), 75-105.

[4] Analytic expressions for bounded solutions of nonlinear ordinary differential equations with an irregular type singular point. Funkcialaj Ekvacioj 12(1969)41-88

[5] Determination of stable domains for bounded solutions of simplified equations Ibid 12(1969)251-267

[6] Analytic expressions for bounded solutions of nonlinear ordinary differential equations with an irregular type singular point. Ann Mat Pura Appl 82(1969)189-256

[7] A general solution of a system of nonlinear ordinary differential equations $xy' = f(x, y)$ in the case when $f_y(0, 0)$ is the zero matrix. Ibid 83(1969)1-42

[8] Bounded solutions and stable domains of nonlinear ordinary differential equations. Springer Symposium on Analytic theory of differential equations(1970) 59-127

[1], [2] では関数 $\chi$ は使われていない。 [8] の第1章は，不確定特異点における解の漸近展開に関する福原の存在定理の詳しい解説がる。 なお境界層の方程式の導き方，$f$, $t$, $\lambda$ の物理的な意味については次を参照して下さい。

[9] 境界層の方程式 $f''' + ff'' + \lambda(1 - f'^2) = 0$ について。
函数方程式 21 (1969) 123 - 140