数理解析研究所講究録
第108巻 1971年 341-348

表現論にあらわれる超函数

阪大 理　岡本 清郷

表現論に於ける invariants の中で最も顕著なものは指標であろう。コンパクトな連結リー群に対してはカルタン部分環上の最高 weight も有力な invariants であるが，非コンパクト群のユニタリー表現は一般に最高 weight を持たない。例えば，SL(2,R)の場合最高 weight を持つのは単位表現を除けば離散系列（古典的な意味，つまり Bargmann の定義を採用するものとする）と呼ばれる一部の表現のみである。ランクが2以上の非コンパクト単純群に対しては離散系列でも最高 weight を持つとは限らない。

ところで，リー群のユニタリー表現の指標は表現行列の対角要素（群上の連続函数，実は実解析函数）の和として定義されるが，この和は無限次元表現の場合単位元での値を考えれば分るように各点収束しない。しかし，半単純リー群や巾零リー群等の場合その既約表現に対しては，各項をハール測

度に関して群上の超函数とみなせばこの和は超函数の意味で収束し指標は群上の超函数として定義される。（[1],[2]等を参照）。リー群は実解析的多様体であるからこの指標は勿論佐藤の超函数である。ところが，一般のリー群に対しては無限次元既約ユニタリー表現の指標は上記の様には定義出来ない。というのは，表現行列の対角要素の和は一般にはSchwartzの超函数の意味では収束しないからである。そこで，なるべく一般のリー群のなるべく一般の既約ユニタリー表現に対して在来の指標の定義を含む拡張された指標なるものを定義し，この拡張された指標が佐藤の超函数であってSchwartzの超函数ではないような例が見つかるかどうかという問題は非常に興味があると思われる。

さて，半単純リー群に対しその連続系列の指標は誘導表現の指標を求める一般的方法に従って C^∞ 級積分核を持つコンパクト多様体上の積分作用素に対する指標公式により容易に計算出来る。（[3]を参照）。しかるに，離散系列の表現に対してはそれが普通の誘導表現によっては得られないことから上記方法が適用出来ず，その指標を求める一般的方法は未だ見つかっていない。しかし乍ら，正則誘導表現で得られる離散系列の表現に対してはGraev[4]がその指標を求める方法を考案し，AIII型の群の場合に実際に計算した。こゝで非常

に興味深いのは Graev がその群の複素化を考え指標を"正則函数の境界値"として促えることにより計算していることである。この事を深く追究すれば，表現の指標は佐藤の超函数的発想により始めてその本質的意味が理解されるという確証が得られるかも知れない。

話の順序が少し前後するが，実は Graev [4] より以前に Harish-Chandra が [5] に於いて一般の半単純リー群に対し正則誘導表現で得られる離散系列の表現の指標を上記 Graev の方法と類似の方法で計算し，コンパクトカルタン部分群のえに共軛な regular elements 全体（これは G の開集合である）上での指標の具体的な形を求めている。Graev [4] にしろ Harish-Chandra [5] にしろ上記表現の指標を計算する際先ずその表現の極大コンパクト部分群乃至はコンパクトカルタン部分群への制限の既約分解を求め，しかる後その結果を用いて指標を求めている。離散系列を極大コンパクト群に制限した表現の既約分解の形は Blattner によりモスクワ国際数学会に於いて予想されたのであるが，上記の正則誘導表現で得られる離散系列の場合を除いては今尚未解決の難問である。

京都に於ける日米微分幾何シンポジュームに於いて Kostant はコンパクトリー群に対する Generalized Borel-Weil 理

論[6]を非コンパクト半単純リー群の場合に拡張すればすべての離散系列が得られるであろうと予想した。その後，尾関氏と筆者は[7]に於いて有界対称領域の運動群の場合に，その上のベクトルバンドルに付随した自乗可積分 $\bar{\partial}$-cohomology spaces を構成しその Laplacian を計算することによって上述のコホモロジー空間の non-vanishing theorem を得た。前記の Blattner の予想が正しければ[7]の結果を用いて，有界対称領域の運動群のすべての離散系列の表現は適当な自乗可積分 $\bar{\partial}$-cohomology spaces の上で実現出来ることが証明される。

一方，Atiyah-Bott [8]は Lefschetz fixed-point formula を応用することにより Borel-Weil 理論に於いて Sheaf cohomology 上で構成された表現の指標を求めた。この Sheaf cohomology 上での表現に限れば，実はもっと見通しの良い証明が[9]で得られている。即ち，先ず有限次元表現の同値類全体は直和に関して半群をなすことに注意し，その Grothendieck 群を考える。次に Sheaf cohomology spaces 上で構成された表現に対し，cohomology の次元に関して Grothendieck 群の元として交代和を作るとこれが単なる誘導表現の交代和となることが証明出来る。後は普通の誘導表現に関する指標公式を用いればよい。しかし，残念

ながらこの方法はそのまゝでは非コンパクト半単純リー群には適用出来ない。なぜならば，もしそれが可能であったとすると指標は極大コンパクト部分群の元と共軛な元全体に台を持つべきで，これは離散系列の表現の指標の台が（少く共今迄知られている限りに於いて）群全体となることに矛盾するからである。

最近，Harish-Chandra は $\mathbb{R}^n$ 上の急減少函数の概念を一般の reductive groups の場合に拡張し，その dual として tempered distribution なる概念を一般化し，そして有界領域の不連続群による商空間上で定義される cusp form なる概念を半単純リー群上の函数空間に導入した。更に彼は離散系列の表現の指標は tempered distribution であること，正則表現の discrete part は cusp forms によって張られること及び正則表現の discrete part に関して Peter-Weyl の理論の類似が成立すること等を示し，その上正則表現の discrete part への直交射影作用素を具体的に構成することに成功した。これを用いて有界対称領域上のベクトルバンドルの自乗可積分切断のなすヒルベルト空間からその上の運動群のユニタリ表現の discrete part への直交射影作用素を構成しそれによって，有界領域上のベクトルバンドルに付随した自乗可積分 $\bar{\partial}$-cohomology spaces 上で定義さ

れた表現の cohomology の次元に関する交代和が discrete part の交代和に一致することが証明出来る。次に離散系列の表現の指標は tempered distribution であること及びその急減少函数に於ける値はその函数の discrete part の成分つまり cusp form によってのみ決まることを用いれば，普通の誘導表現の指標公式から上記$\mathfrak{n}$-cohomology space 上で定義される表現の指標の交代和が計算される。これと vanishing theorem とを合せると求める指標が得られる。

参考文献

[1] Harish-Chandra: Representations of semisimple Lie groups III, Trans. Amer. Math. Soc. vol 76 (1954).

[2] A. A. Kirillov: Unitary representations of nilpotent Lie groups, Uspehi Mat. Nauk 17 no4 (1962).

[3] Harish-Chandra: The Plancherel formula for complex semisimple Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 76 (1954).

[4] M. I. Graev: Unitary representations of real semisimple Lie groups, Trudy, 7 (1958).

[5] Harish-Chandra: Representations of semisimple Lie groups V, Amer. J. Math. 78 (1956).

[6] B. Kostant: Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem, Ann. of Math. 74 (1961).

[7] K. Okamoto and H. Ozeki: On square-integrable $\bar{\partial}$-cohomology spaces attached to hermitian symmetric spaces, Osaka J. Math. 4 (1967).

[8] M. F. Atiyah and R. Bott: A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes II,

applications, Ann. of Math. 88 (1968).
[9] R. Bott : The Index theorem for homogeneous differential operators, Differential and Combinatorial topology, Cairns, Princeton.
[10] M. S. Narasimhan and K. Okamoto : An analogue of the Borel-Weil-Bott theorem for hermitian symmetric pairs of non-compact type, to appear in Ann. of Math.