数理解析研究所講究録
第 110 巻 1971 年 1-8

Martingale difference と Paley の不等式

東北大 教養 吾妻一興

§1. $(\Omega, \underline{F}, P)$ を確率空間, $f=(f_n)_{n\in N}$ を確率変数列, $(\underline{F}_n)_{n\in N}$ を $\underline{F}$ の sub σ-field の増加列とする。このとき, 各 n に対し

(i) f_n は $\underline{F}_n$-可測, (ii) $E\{|f_n|\}<+\infty$, $E\{f_n|\underline{F}_{n-1}\}=f_{n-1}$ a.s.

であるときに, $f=(f_n, \underline{F}_n)$, 又は f を martingale という。
更に, $\varphi_1=f_1$, $\varphi_n=f_n-f_{n-1}$, $n\geq 2$ として, $\varphi=(\varphi_n)_{n\in N}$ を定義すると, 各 n に対して

(i)′ φ_n は $\underline{F}_n$-可測, (ii)′ $E\{|\varphi_n|\}<+\infty$, $E\{\varphi_n|\underline{F}_{n-1}\}=0$ a.s.

である。(i)′, (ii)′ をみたす確率変数列 $\varphi=(\varphi_n, \underline{F}_n)$ 又は φ を, martingale difference という。以下, 次の記号を採用する。
確率変数列 $h=(h_n)_{n\in N}$ に対して, $h^*(\omega)=\sup_n|h_n(\omega)|$, $\|h\|_p=\sup_n\|h_n\|_p$ とする。又 $\|h\|_p<+\infty$ であれば, h は L^p-bounded であるという。

martingale f と, その difference φ に対して

$$S_n(f)=\Big(\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^2\Big)^{\frac{1}{2}},\quad S(f)=\lim_{n\to\infty}S_n(f)\qquad \text{とする。}$$

次に，確率変数列 $v=(v_n)_{n\in N}$ が，各 n に対し，v_n が $\underline{F}_{n-1}$ 一可測であるときに，v を multiplier sequence ということにする。
すると，f を martingale，φ をその difference sequence として，$(v\circ f)_n=\sum_{k=1}^{n} v_k\varphi_k$ で，$v\circ f$ を定義すると，$E\{|v_k\varphi_k|\}<+\infty$ なら $v\circ f$ も martingale である。これを，v の f に関する transform という。

§2. martingale difference と Haar系，Walsh系を含むある直交系の class との関係についての例として，次の Marcinkiewicz と Zygmund の定理の Gundy [3] による拡張を述べておく。

<u>定理 1.</u> $\varphi=(\varphi_n)$ を martingale difference として，$k\geq 1$ に，

$$E\{\varphi_k^2 \mid \underline{F}_{k-1}\}=1 \quad \text{a.s.}$$

$$E\{|\varphi_k| \mid \underline{F}_{k-1}\}\geq \Gamma>0 \quad \text{a.s.}$$ （但し Γ は $0<\Gamma<1$ なる定数）

なる性質をもつものとする。

すると，任意の multiplier sequence $v=(v_n)$ に対して，次の3つの集合は同値である。

$$A=\{\omega : \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} v_k(\omega)\varphi_k(\omega) \text{ exists and is finite}\}$$

$$B=\{\omega : \sum_{k=1}^{\infty} v_k^2(\omega)<+\infty\}$$

$$C=\{\omega : \sum_{k=1}^{\infty} v_k^2(\omega)\varphi_k^2(\omega)<+\infty\}$$

φ が，独立，正規直交系で，$E\{|\varphi_k|\}\geq\Gamma>0$ なるものは，明らか

かに，定理1の条件をみたしているが，Gundy は もっと意味あるclassを含んでいることを証明した。 即ち

<u>Proposition</u> f は次の性質をもつ $(\mathfrak{F}_n)$ に関して martingale とする。

$(\mathfrak{F}_n)$ は purely atomic な σ-field の増加列で，$F_{k+1}\subset F_k$, $F_k\in\mathfrak{F}_k$, $F_{k+1}\in\mathfrak{F}_{k+1}$ なる任意の2つの atom に

$$P\{F_{k+1}\}/P\{F_k\}\geq\delta>0 \quad (\text{但し } \delta \text{ は定数})$$

が成り立つものとする。すると，定理1の条件をみたし，$\|\varphi\|_\infty<+\infty$ なる φ があって，f は $g=(g_n=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k)_n$ に関する transform としてかける。

たとえば，Walsh 級数の 2^n-部分和 $\overline{W}_{2^n}$ に対して，上の事実は $(r_n)_n$ を Rademacher 系としたとき，$\overline{W}_{2^n}=\sum_{k=0}^{n-1}v_k r_k+\text{const.}$ の形にかけることを意味するに他ならない。いま，これに定理を用いると，

$$\lim_{n\to\infty}\overline{W}_{2^n}\ \text{exists and is finite a.s.}\rightleftarrows\sum(\overline{W}_{2^n}-\overline{W}_{2^{n-1}})^2<+\infty\ \text{a.s.}$$

を得る。また最近 B. Davis [2] は，定理1の条件下では

$D^+=\{\omega:\sup_n\sum^{n}v_k\varphi_k<+\infty\}$，従って，$D^-=\{\omega:\inf_n\sum^{n}v_k\varphi_k>-\infty\}$

も，A, B, C と同値であることを証明した。

R. F. Gundy [5] は，martingale difference $\varphi=(\varphi_n,\mathfrak{F}_n)$，$\mathfrak{F}_0=\{\phi,\Omega\}$，で，$\varphi_1=1$, $E\{\varphi_k^2|\mathfrak{F}_{k-1}\}=1$ a.s. $\|\varphi\|_\infty<+\infty$ なるものに対して，$f_n=\sum_{i=1}^{n}v_i\varphi_i$ とかける non negative martingale $f=(f_n,\mathfrak{F}_n)_n$ に，

$$\frac{c}{\lambda}\int_{\{f^*>\lambda\}}f_n\,dP\leq P\{f_n^*>\lambda\}\leq\frac{1}{\lambda}\int_{\{f_n^*>\lambda\}}f_n\,dP$$

(但し, $f_n^* = \sup_{1\leq k\leq n} f_k$, $\lambda \geqq \|f_1\|_1$) が成りたつことを示した。すると, 上の proposition を用いることにより, E.M.Stein (Studia Math. XXXII (1969)) の, Hardy–Littlewood maximal function による class $L\log L$ の characterization を martingale で考えることが出来る。

§3. 次の定理は, Paley が Walsh 級数の 2^n–部分和に対して示したものであるが, Burkholder による証明は, martingale の理論として興味あるものである。ここでは, Burkholder [1], Gundy [4] に従い紹介する。

定理 1　$1<p<+\infty$ なる p に, 正数 C_p, C_p' が存在して, f を martingale としたとき

$$C_p \|S_n(f)\|_p \leqq \|f_n\|_p \leqq C_p' \|S_n(f)\|_p \quad 。$$

まず, L^1–bounded martingale の Gundy の分解をのべる。

定理 2　f を L^1–bounded martingale とすると, $\lambda > 0$ に対し, 次の性質をもつ martingale a, b, d が存在する。

$$f = a + b + d$$

(i) martingale a の difference を $\alpha = (\alpha_n)$ とすると,

$$\|a\|_1 \leqq C \|f\|_1$$

$$\lambda P\{\alpha^* \neq 0\} \leq C\|f\|_1$$

(ii) martingale b の difference を $\beta = (\beta_n)$ とすると，

$$\| \sum_1^\infty |\beta_n| \|_1 \leq C\|f\|_1$$

(iii) $\|d\|_\infty \leq C\lambda, \quad \|d\|_2^2 \leq C\lambda\|f\|_1$ 。

この分解定理を用いれば，martingale f と，$v^* \leqq 1$ なる multiplier sequence v に対して，

$$P\{(v \circ f)^* > \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_1 \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$P\{S(f) > \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_1$$

などの不等式を得ることが出来る。しかし，そのとき，$Tf = (v \circ f)^*$，又は $Tf = S(f)$ とおけば，T は確率変数列から確率変数への，次の性質をもつ mapping であることが，本質的である。

1° $|T(f+g)| \leq C(|Tf| + |Tg|)$

2° $P\{|Tf| \neq 0\} \leq CP\{f^* \neq 0\}$

3° (a) $\|Tf\|_2 \leq C\|f\|_2$

(b) $\|Tf\|_1 \leq C\|\sum_1^\infty |\varphi_k|\|_1$ 。

従って，いま，この性質をもつ T を class $\mathcal{B}$ mapping ということにすると，上の不等式は，一般に，

<u>Proposition</u> L^1-bounded martingale 上の class $\mathcal{B}$ mapping は，weak type (1,1)。

であることとして証明出来る。

以下では、不等式(1)に注目するのであるが、これは、次の Burkholder の定理の special case である

<u>定理 3</u> f, g を、同じ σ-field に関しての martingale とする。すると、$S(g) \leqq S(f)$ であれば $P\{ g^* > \lambda \} \leqq \frac{c}{\lambda} \|f\|_1$ 。

次に、$v^* \leqq 1$ なる multiplier sequence v に対して、

$$T_n = v_1 E\{ \cdot \mid \underline{F}_1 \} + \sum_{k=2}^{n} v_k \left[E\{ \cdot \mid \underline{F}_k \} - E\{ \cdot \mid \underline{F}_{k-1} \} \right]$$

を考えれば、T_n は linear である。又 $h' \in L^\infty$ に、$h_n = E\{h' \mid \underline{F}_n\}$ として、martingale h を作れば、$T_n h' = (v \circ h)_n$ であるから、定理 3 又は不等式(1)により T_n は weak type (1,1) で、更に、

$$\| T_n h' \|_2^2 = \| (v \circ h)_n \|_2^2 \leqq \| h_n \|_2^2 \leqq \| h' \|_2^2$$

であるから Marcinkiewicz の interpolation により、$1<p<2$ に対して、$\| T_n h' \|_p \leqq C_p \| h' \|_p$ なる C_p の存在が判る。

$p>2$ に対しては、

$$\int T_n h' \cdot h'' \, dP = \int h' \cdot T_n h'' \, dP$$

であることから、C_p の存在が判る。与えられた martingale f に対して、$(v \circ f)_n = T_n f_n$ となるから、次の定理を得る。

<u>定理 4</u> $1<p<+\infty$ なる p に対し、ある正数 C_p が存在して、martingale f と、$v^* \leqq 1$ なる multiplier sequence v に対して、

$$\|(v\circ f)_n\|_p \leqq C_p \|f_n\|_p 。$$

この定理と，(r_k) が Rademacher 系なら $1 \leqq p < +\infty$ に対して，

$$A_p\left(\sum^n a_k^2\right)^{\frac{p}{2}} \leqq \int_0^1 \left|\sum^n a_k r_k\right|^p dt \leqq B_p\left(\sum^n a_k^2\right)^{\frac{p}{2}}$$

が成り立っていることを用いれば，定理1は次のように証明出来る。

$$\begin{aligned} A_p C_p^{-p} \|S_n(f)\|_p^p &\leqq C_p^{-p} E\left\{\int_0^1 |(r\circ f)_n|^p dt\right\} \\ &= C_p^{-p} \int_0^1 E\{|(r\circ f)_n|^p\} dt \\ &\leqq \|f_n\|_p^p \\ &\leqq B_p C_p^{-p} \|S_n(f)\|_p^p 。\end{aligned}$$

但し，ここに，$g = r\circ f$ とすると，$f = r\circ g$ であることを用いた。

文献

[1] D.L. Burkholder, Martingale transforms, Ann. Math. Statist., 37 (1966), 1494–1504.

[2] B. Davis, Divergence properties of some martingale transforms, Ann. Math. Statist., 40 (1969), 1852–1854.

[3] R.F. Gundy, The martingale version of a theorem of Marcinkiewicz and Zygmund, Ann. Math. Statist., 38 (1967), 725–734.

[4] R.F. Gundy, A decomposition for L^1-bounded martingales, Ann. Math. Statist., 39 (1968), 134–138.

[5] R.F. Gundy, On the class L logL martingales, and singular integrals. Studia Math., 33 (1969), 109 – 118.