数理解析研究所講究録
第111巻 1971年 47-56

群の直積とその表現について

東京教育大 大学院 光 道隆

§0. 序

例えば次の様な問題を考えよう。"πを finite abelian group，Qを有理数体，$\mathbb{Z}$を有理整数環，ϑを$\mathbb{Z}\pi$を含む$Q\pi$の maximal order とする。その時，$Pic(\mathbb{Z}\pi) \xrightarrow{\varphi} Pic(\vartheta)$ の$Ker\varphi$はどのように捕らえられるか？" この問題に関して R.G. Swan，宮田武彦氏により次の結果がえられている。πの subgroup π'に対し $\mathbb{Z}\pi\otimes_{\mathbb{Z}\pi'}\mathbb{Z}$ という型の$\mathbb{Z}\pi$-module の有限個の direct sum を permutation π-module，π-permutation module $\exists S$，$\exists S'$，$0 \longrightarrow M \longrightarrow S \longrightarrow S' \longrightarrow 0$ (exact) と書ける$\mathbb{Z}\pi$-module M を quasi-permutation $\mathbb{Z}\pi$-module とよぶ時，πがもし cyclic group ならば，$Ker\varphi = q\text{-}Pic(\mathbb{Z}\pi) = \{[I] \mid I$; quasi-permutation $\mathbb{Z}\pi$-projective ideal$\}$である。ところで，πが abelian group の時 $q\text{-}Pic(\mathbb{Z}\pi) \subset Ker\varphi$ は Swan の方法により容易に証明できるが，その逆が言えるか

どうかが問題である．宮田氏のうまい方法により cyclic の時は分っているのだから，abelian group の時の問題が cyclic の時に帰着できればと望むのは自然であろう．その様な事からも，群の直積と表現との関係はどうなっているのか興味がある．今日述べるのは，その関係を調べるほんの半歩で，$\mathbb{Z}$上の表現との関係よりずっと以前の問題についてである．つまり，πを finite group，Kを field，$G_0(K\pi)$を Grothendieck ring としたとき，$\varphi: G_0(K\pi_1)\otimes G_0(K\pi_2) \longrightarrow G_0(K[\pi_1\times\pi_2])$，$\varphi([M_1]\otimes[M_2])=[M_1 \# M_2]$，の Kernel，Cokernel を考えるのである。もちろん $M_1 \# M_2$ は M_1，M_2 の outer tensor product である。

§1.

まず，Fein[2]にしたがって，φを Schur index を用いて捕らえよう．

EをK上 finite な normal separable extension でπの splitting field になっているものとする．$\mathcal{G}(E/K)$をK上Eの Galois group，一般に $E\pi$-module N，$\sigma\in\mathcal{G}(E/K)$に対し，$\sigma N$を自然に定義し，$N$の character を$\chi$としたとき，$\sigma N$の character を$\sigma\chi$と書く．$m_K(N)$で$N$の$K$上の Schur index を表わし，$\pi=\pi_1\times\pi_2$と置き，$M_i$を irreducible $K\pi_i$-module，N_iをM_i^Eの irreducible $E\pi_i$-component，ψ_iをN_i

の character, $\mathcal{H}_i = \mathcal{G}(E/K(\psi_i))$ と書く。

次の事実は Fein [2] にのっている。

(1) $\sigma, \tau \in \mathcal{G}(E/K)$ とすると $\sigma N_1 \# \tau N_2$ も irreducible module で, $m_K(N_1 \# N_2) = m_K(\sigma N_1 \# \tau N_2)$ である。

(2) $M_1 \# M_2$ も完全可約で, $M_1 \# M_2 \cong k(T_1 \oplus \cdots \oplus T_r)$, ここで $\{T_i\}$ は nonisomorphic irreducible $K\pi$-module で, k は $m_K(N_1)\, m_K(N_2) / m_K(N_1 \# N_2)$ に等しい。さらに T_i はそれぞれ同じ K-dimension $m_K(N_1 \# N_2)(K(\psi_1, \psi_2) : K)(N_1 \# N_2 ; E)$ をもっている。

(3) $M_1 \# M_2$ が irreducible module であるための必要十分条件は次の3条件である。

(a) $m_K(N_1)\, m_K(N_2) = m_K(N_1 \# N_2)$.

(b) $\mathcal{G}(E/K) = \mathcal{H}_1 \mathcal{H}_2$.

(c) $(K(\psi_1):K)(K(\psi_2):K) = (K(\psi_1, \psi_2):K)$.

(4) $\pi_1 = \pi_2$ のとき, irreducible $K\pi_1$-module M_1 について次は同値である。

(a) M_1 は absolutely irreducible $K\pi_1$-module である。

(b) $M_1 \# M_1$ は irreducible $K\pi$-module である。

さて, (2) より φ は Schur index を用いて一応きまっている。(4) は $\pi_1 = \pi_2$ の時は φ が同型になるための必要十分条件は K が π_1 の splitting field であることを主張している。つまり,

問題はSchur indexに帰着されるのであるが，現在のSchur indexの計算法ではglobalなあつかいは無理である。以下では違った角度から調べてみる。最後に(3)からの簡単な系を書いておこう。

(5) group π のorderを$|\pi|$と書く。

$$(|\pi_1|,|\pi_2|)=1 \Longrightarrow G_0(Q\pi_1)\otimes G_0(Q\pi_2)\xrightarrow{\varphi} G_0(Q[\pi_1\times\pi_2])$$

以下一つの目的はこの逆にあたる事を調べる事にある。

§2 道具をそろえる

以下char. K＝0のときあつかう。

(1).

Lemma 1. π_iがabelian groupならば，$\mathrm{Ker}\,\varphi=0$で$\mathrm{Coker}\,\varphi$はtorsion freeである。

これは，π_iがabelian groupの時Schur indexが1である事に注意すれば§1の(2)よりφがsplit mapになることより分る。

さて，π'をπのsubgroupとする時 $G_0(K\pi)\underset{j^*}{\overset{j_*}{\rightleftarrows}}G_0(K\pi')$ をfunctor $\mathrm{mod}\,K\pi \underset{\cdot\otimes_{K\pi'}K\pi}{\overset{res.}{\rightleftarrows}} \mathrm{mod}\,K\pi'$ よりみちびかれるring homomorphismとする．$\pi_i\supset\pi_i'$の時

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Ker}\,\varphi & \longrightarrow & G_0(K\pi_1)\otimes G_0(K\pi_2) & \xrightarrow{\varphi} & G_0(K[\pi_1\times\pi_2]) & \longrightarrow & \mathrm{Coker}\,\varphi \\
\uparrow\downarrow & \circlearrowright & \uparrow\downarrow & \circlearrowright & \uparrow\downarrow & \circlearrowright & \uparrow\downarrow \\
\mathrm{Ker}\,\psi & \longrightarrow & G_0(K\pi_1')\otimes G_0(K\pi_2') & \xrightarrow{\psi} & G_0(K[\pi_1'\times\pi_2']) & \longrightarrow & \mathrm{Coker}\,\psi
\end{array}$$

であり，一般に φ を調べるのに induction theorem は使用可能である。例えば，Artin の induction theorem を用いれば，次の結果が得られる。

Proposition 2. π_i を finite group とすると $\mathrm{Ker}\,\varphi = 0$ である。

この Proposition は induction を用いなくても直接証明できる。

(2). Normal subgroup からの情報

$1 \longrightarrow \pi_i' \xrightarrow{j} \pi_i \xrightarrow{p} \pi_i'' \longrightarrow 1$ (exact) $\pi_i' \triangleleft \pi_i$ とする。今，又，
$G_0(K\pi_i) \underset{p_*}{\overset{p^*}{\rightleftarrows}} G_0(K\pi_i'')$ を mod $-K\pi_i \underset{res}{\overset{\cdot\otimes_{K\pi_i}K\pi_i''}{\rightleftarrows}}$ mod $-K\pi_i''$ よりみちびかれる ring homomorphism とする。

$$
\begin{tikzcd}
G_0(K\pi_1'')\otimes G_0(K\pi_2'') \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, shift left, "p_*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G_0(K[\pi_1''\times\pi_2'']) \arrow[r, "\varphi_1'"] \arrow[d, shift left, "p_*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Coker}\,\varphi_1 \arrow[d, shift left, "p_*"] \\
G_0(K\pi_1)\otimes G_0(K\pi_2) \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[u, shift left, "p^*"] \arrow[d, shift left, "j_*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G_0(K[\pi_1\times\pi_2]) \arrow[r, "\varphi_2'"] \arrow[u, shift left, "p^*"] \arrow[d, shift left, "j_*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Coker}\,\varphi_2 \arrow[u, shift left, "p^*"] \arrow[d, shift left, "j_*"] \\
G_0(K\pi_1')\otimes G_0(K\pi_2') \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[u, shift left, "j^*"] & G_0(K[\pi_1'\times\pi_2']) \arrow[r, "\varphi_3'"] \arrow[u, shift left, "j^*"] & \mathrm{Coker}\,\varphi_3 \arrow[u, shift left, "j^*"]
\end{tikzcd}
$$

M を $K[\pi_1'\times\pi_2']$ の irreducible module とすると，

$M^E \cong m_K(N_1\# N_2)(N_1\# N_2 \oplus \gamma(N_1\# N_2)\oplus\cdots\ )$ と書ける。
ただし，E は §1 の様に K 上 finite normal separable な $\pi_1'\times\pi_2'$ の splitting field，N_i は $E\pi_i'$-irreducible module，N_i の character を ψ_i とすると，$\gamma\in\mathcal{G}(E/K)\,/\,\mathcal{G}(E/K(\psi_1,\psi_2))$ である。Normal subgroup からの情報として次の Lemma が

得られる。

Lemma 3 (a) irreducible $K[\pi_1'\times\pi_2']$-module M が存在して、$\varphi_3'([M])\neq 0$ で、

$$\frac{m_K(N_1)\,m_K(N_2)\,(K(\psi_1):K)\,(K(\psi_2):K)}{m_K(N_1\# N_2)\,(K(\psi_1,\psi_2):K)}\nmid m$$

ならば, $\mathrm{Coker}\,\varphi_2\neq 0$ である。ただし, $m=|\pi_1'\times\pi_2'|$ とする。

(b). $\varphi_3'([M])\neq 0$, M の character を χ とするとき, χ の inertial group $I(\chi)=\{g\mid g\in\pi_1\times\pi_2,\ \chi^g=\chi\}=\pi_1\times\pi_2$ をみたすような irreducible $K[\pi_1'\times\pi_2']$-module M が存在すると仮定し, さらに, $\mathrm{Coker}\,\varphi_3$ は torsion free だと仮定すると $\mathrm{Coker}\,\varphi_2\neq 0$ である。

(c) $K=Q$ とし, π_1', π_2' をそれぞれ $(\underbrace{p,\dots,p}_{n})$, $(\underbrace{p,\dots,p}_{m})$ (p は odd prime) 型の abelian group, $Z_i=C_{\pi_i}(\pi_i')$ (centralizer) とし, π_i/Z_i を加群 π_i' の morphism の group と考え, 自然な map $\pi_1/Z_1\times\pi_2/Z_2\xrightarrow{\ \psi\ } PGL(n+m,p)$ を考える。$Z/(p)$ の原始根を r とする。

$$i_*j^*\,\mathrm{Coker}\,\varphi_3=0 \iff \psi(\pi_1/Z_1\times\pi_2/Z_2)\ni^{\exists}\begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad}^{n}\ \overbrace{\qquad\qquad}^{m} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & r & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & r \end{pmatrix}\end{array}=\sigma.$$

σ の order は $p-1$ である。

(d) $\mathrm{Coker}\,\varphi_1\neq 0$ ならば $\mathrm{Coker}\,\varphi_2\neq 0$ である。

(3).

group π に対してその exponent を $e(\pi)$ と書くことにする。

Lemma 4. π_i を abelian group とし, $G.C.D.(e(\pi_1), e(\pi_2)) = \prod p^{h_p}$ と素元分解でき, K に含まれる 1 の原始 p^s 乗根のうち s の最大値をそれぞれ S_p とする。もし, $h_p > S_p$ なる p が存在すれば, $\varphi : G_0(K\pi_1) \otimes G_0(K\pi_2) \not\twoheadrightarrow G_0(K[\pi_1 \times \pi_2])$。

§3. 応用

§2 でそろえた道具をエイヤッと振回してみると, 次の事が出てくる。

(1). abelian group の時.

$K = Q$, $\pi_1 = (p^{n_1}, p^{n_2}, \cdots, p^{n_l})$ 型, $\pi_2 = (p^{n_{l+1}}, \cdots, p^{n_{l+k}})$ 型の abelian group とすると,

Coker φ の rank

$$= \sum_{0 \leq t_i \leq n_i} \left\{ \varphi(p^{t_1}) \times \cdots \times \varphi(p^{t_{l+k}}) \times \left[\varphi\left(p^{\max\limits_{1\leq i\leq l+k}(t_i)}\right)^{-1} - \varphi\left(p^{\max\limits_{1\leq i\leq l}(t_i)}\right)^{-1} \varphi\left(p^{\max\limits_{1\leq j\leq k}(t_{l+j})}\right)^{-1} \right] \right\}.$$

記号が繁雑になってしまったが, Σ 内の φ は Euler の函数を表わすものとする。

(2). 任意の group について.

group π の center を $Z(\pi)$ と書く. 今. $\underset{\pi_1' \triangleleft \pi_1}{L.C.M.}(e(Z(\pi_1/\pi_1'))) = \prod p^{m_p}$, $\underset{\pi_2' \triangleleft \pi_2}{L.C.M.}(e(Z(\pi_2/\pi_2'))) = \prod p^{n_p}$ と素元分解していると仮定し, S_p を K に含まれる 1 の原始 p^s 乗根のうちで, s の最大値とする. $\exists p$ s.t. $\min(m_p, n_p) > S_p$

$$\Longrightarrow \quad G_0(K\pi_1) \otimes G_0(K\pi_2) \not\twoheadrightarrow G_0(K[\pi_1 \times \pi_2]).$$

(3) $\underset{\pi' \triangleleft \pi}{L.C.M}(e(Z(\pi/\pi'))) = h$ とすると, π の splitting field

は$Q(\sqrt[p]{1})$を含む。

(4). π_iをodd orderのgroupとし，$^{\exists}p \mid (|\pi_1|, |\pi_2|)$，$2 \mid (K(\zeta_p):K)$
pはodd prime，ζ_pは1の原始p乗根と仮定すると，

$G_0(K\pi_1) \otimes G_0(K\pi_2) \not\rightarrow G_0(K[\pi_1 \times \pi_2])$である．

Remark

特に$K=Q$とすれば，$2 \nmid |\pi_1||\pi_2|$ならば

$(|\pi_1|, |\pi_2|) = 1 \Longleftrightarrow G_0(Q\pi_1) \otimes G_0(Q\pi_2) \xrightarrow{\sim} G_0(Q[\pi_1 \times \pi_2])$.

(5) $|\pi| = \prod_{i=1}^{m} p_i^{e_i}$と素元分解でき，任意の$i, j$について$p_i \nmid p_j - 1$と仮定すると$\pi$のsplitting fieldは$Q(\zeta_{p_1 \cdots p_m})$を含む。ただし，$\zeta_{p_1 \cdots p_m}$は1の原始$p_1 \cdots p_m$乗根である。

Solomonの結果とあわせれば，このようなtypeのgroupのsplitting fieldはきまったことになる．

Remark

Order $n = p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m}$をfixしたとき，そのorderをもつすべてのgroupがnilpotent groupであるための必要十分条件は$p_j \nmid p_i^{n_i - t} - 1$, $n_i > {}^{\forall}t \geqq 0$であるから，(5)は有意味である。

(6). 2-groupの時は，index 2のcyclic subgroupをもつようなgroupについて考えてみる事が重要である。それは，任意の2-groupのcharacterがある意味でその様なgroupのcharacterによって表わされるからである。(Feit [3] P.73,

(14.3) 参照)。

ところで，index 2 の cyclic subgroup をもつ group は次の type しかない。

$|\pi| = 2^{n+1}$ とする。

I. $\pi = \langle s \mid s^{2^{n+1}} = 1 \rangle$.

II. $\pi = \langle s, t \mid s^{2^n} = 1,\ t^2 = 1,\ tst^{-1} = s \rangle$

III. $\pi = \langle s, t \mid s^{2^n} = 1,\ t^2 = s^{2^{n-1}},\ tst^{-1} = s^{-1} \rangle \quad n \geqq 2$.

IV. $\pi = \langle s, t \mid s^{2^n} = 1,\ t^2 = 1,\ tst^{-1} = s^{-1} \rangle \quad n \geqq 2$

V $\pi = \langle s, t \mid s^{2^n} = 1,\ t^2 = 1,\ tst^{-1} = s^{1+2^{n-1}} \rangle\ n \geqq 3$

VI $\pi = \langle s, t \mid s^{2^n} = 1,\ t^2 = 1,\ tst^{-1} = s^{-1+2^{n-1}} \rangle\ n \geqq 3$.

$G_0(Q\pi_1) \otimes G_0(Q\pi_2) \xrightarrow{\sim} G_0(Q[\pi_1 \times \pi_2])$ となるのは

① π_1 が type I で $n = 0$ 又は II で $n = 1$, IV で $n = 2$ で
π_2 が任意の type の時，

② π_1 が type (I, $n = 1$), (II, $n = 2$), (III, $n = 2$), (V, $n = 3$) 又は (VI, $n = 3$) で，π_2 が type IV の時，

③ π_1 が type (I, $n = 1$), (III, $n = 2$), 又は (V, $n = 3$) で，π_2 が type VI の時だけである。

文献

[1] C. W. Curtis and I. Reiner : Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras, Interscience, 1962.

[2]. B. Fein ; Representations of direct products of finite groups, Pacific. J. Math., 20. (1967)
[3]. W. Feit ; Characters of Finite Groups, Benjamin 1967.
[4] W. Feit and J. G. Thompson ; Solvability of groups of odd order, Pacific. J. Math., 13 (1963)
[5] L. Solomon ; The representation of finite groups in algebraic number fields, J. Math, Soc. Japan 13. (1961).
[6] M. Hikari ; 準備中