数理解析研究所講究録
第111巻 1971年 57-64

Invariant Rational Functions

京大 数研 宮田 武彦

kを体, $F = k(x_1, \cdots, x_n)$ をk上のn変数の有理函数体(以下"有理体"と呼ぶ)とする。このとき$GL_n(k)$は、vector space $V = kx_1 + \cdots + kx_n$ に自然に作用し, Fのk-自己同型をひき起す。部分群 $G \subseteq GL_n(k)$ に関して, G不変な元全体はFの部分体である。これをF^Gと書く。

問題:どのようなk, G に関して F^G がまたk上有理体となるか?

R. G. Swan は G が cyclic group であっても F^Gが有理体でない例があることを示した([1])。また F^G が有理体となる k, G の pairs は Masuda 氏等により与えられた([2], [3])。

以下で述べることは Swan, Masuda の方法を遠藤氏と一般化しようと試みた結果の報告である。

今後簡単のため $k=\mathbb{Q}$ の場合を考えよう（§3 を除く）.

1°. Masuda の加群

G を finite abelian group とする. m を G の exponent, ζ_m を 1 の m 乗根 とし $\pi = Gal(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$ とする. $G \subset GL_n(\mathbb{Q})$, $F = \mathbb{Q}(x_1, \cdots, x_n)$, G は $GL_n(\mathbb{Q})$ を通じて $V = \mathbb{Q}x_1 + \cdots + \mathbb{Q}x_n$, 従って F に $\mathbb{Q}$-同型に作用しているとする. $k = \mathbb{Q}(\zeta_m)$ とおき $F_0 = Fk$ とする. G は F_0 に $\mathbb{Q}$-同型（又は k-同型）に作用する. G と π は元ごとに可換である. $V_0 = Vk = kx_1 + \cdots + kx_n$ は G 加群として完全に分解する. $V_0 = ky_1 \oplus \cdots \oplus ky_n$ と分解したとすると, Hilbert の定理 90 により π は集合 $\{y_1, \cdots, y_n\}$ の上の permutation をひきおこすように $y_1, \cdots, y_n$ を選ぶことができる. F_0 の乗法群の部分群で $y_1, \cdots, y_n$ で生成されたものを H とする. $H \cong \mathbb{Z}^n$ で H は自然に π 加群になる. H の元で G 不変なもの全体 M は H の π 部分加群になる. この M を F に関する Masuda の加群と呼ぶことにする.

一般に N を $\mathbb{Z}$-rank が n である $\mathbb{Z}$-free, π-module とする. $N = \mathbb{Z}\xi_1 + \cdots + \mathbb{Z}\xi_n$ とおく. $\pi = Gal(k/\mathbb{Q})$, $K = k(x_1, \cdots, x_n)$ とする. π を N を通じて次のように K に $\mathbb{Q}$-同型として作用させることができる.

$g\in\pi$, $g(a_1g_1+\cdots+a_ng_n)=b_1g_1+\cdots+b_ng_n$ とするとき

$$g(\alpha x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n})=\alpha^g x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}\qquad \alpha\in k$$

π のこの作用を k に制限するともとのガロア群の作用と一致する。このとき $K=k(N^\times)$ と書くことにする。ガロア群の基本定理から

補題　M を Masuda の加群とすると

1°.　$[H:M]=\#(G)$

2°　$F^G=(F_0{}^\pi)^G=(F^G)^\pi\cong k(M^\times)^\pi$.

F^G が Q 上有理的かどうかを判定するのには 2° が基本的である。

G の $V=Qx_1+\cdots+Qx_n$ 上の表現が $V=V_1\oplus V_2$ と分解し、G が V_1 上に faithful に作用しているとする。V_2 の basis を $x_1,\cdots,x_l$ とすると $Q(V)=Q(V_1)(x_1,\cdots,x_n)$ Hilbert の定理 90 によれば $y_1,\cdots,y_l$ を $x_1,\cdots,x_l$ の $Q(V_1)$ 係数の一次式として適当に選べば、y_i は G 不変でかつ $Q(V)=Q(V_1)(y_1,\cdots,y_l)$ となるように選べる。$Q(V_1)$ から作った Masuda の加群も簡単のため $Q(V)$ の Masuda の加群と呼ぶことにする。

π を有限群，π-加群が induced modules の直和に同型なとき permutation module と呼ぶ。またガロア群の基本定理，または Hilbert の定理90 により

定理 (Masuda) Masuda の加群が permutation ならば $\mathbb{Q}(V)^G$ は有理体である.

Masuda の加群の例

G を $\#(G) = n$ の abel 群とし $V = \mathbb{Q}x_1 + \cdots + \mathbb{Q}x_n$ を G の regular representation とする。$\pi = Gal(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$

(A) $n = p^l$, $p > 2$ の場合

$\mathbb{Z}\pi$ の ideal M_n で $p^{l-1}(p-1)$ $t - a$ で生成されたもの。（t は G の生成元，a は mod p^l での原始根）

(B) $n = 2^l$, $l > 3$

$$\pi \cong \left(\mathbb{Z}/(2^{l-2})\right)^* \oplus (\pm 1) = \langle \tau \rangle \oplus \langle s \rangle$$

とする。M_n は π の ideal で，2^l, $\tau - 5$, $s + 1$ で生成されたもの．

(C) $n = 2, 2^2$ のときは (A)と同じに作れる.

(D) $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$ のとき M_n は

$$M_{p_1^{\alpha_1}} \oplus \cdots \oplus M_{p_m^{\alpha_m}}$$

と同型に選べる.

(A), (C) の場合は M_n は projective. (B) の場合は決して projective ではない. (D) の場合は一般には判らない. (A)の場合でしかも $l=1$ なら, $p \leq 11$ なら M_n は free であることが証明されている (Masuda [3]). $p=13$ なら free でない ([4]).

2° Swan の定理

π を有限群, M を $\mathbb{Z}$-free f.g. π-module とする.
S, S' が permutation modules で

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow S \longrightarrow S' \longrightarrow 0$$

が exact のとき M を q-p-module (quasi-permutation module) と呼ぶことにする.

定理 (Swan [1]) K/k は finite galois extension $\pi = gal(K/k)$, M を $\mathbb{Z}$-free π-module で f.g なものとする. そこでこのとき次の条件は同値である.

(1) 適当な不定元 $y_1, \cdots, y_r$ を取ると

$K(M^{\times})^{\pi}(y_1, \cdots, y_t)$ は K 上有理体である。

(2) M は g-p-module

§1° の例 M_n を考える。例 A の M_{p^l} は projective module になることが簡単に云える。B. の M_{2l} は projective ではない、するに g-p-module でもないことが判る。また M_p $p \leq 11$ なる free (Masuda [3]) $p=13$ なる free ではない (宮西 [4])

$K' = \mathbb{Q}(\zeta_{p^{l-1}(p-1)})$ に $g\alpha = \zeta\alpha$ で π の作用を入れる (g は π の生成元)。準同型

$$M \longrightarrow \mathbb{Z}[\zeta]$$

が決まる。M の image は ideal $\mathfrak{a} = (p^l, \zeta - \alpha)$ である。$p = 47$ のとき $\mathfrak{a}$ は単項でない従って $\mathbb{Q}(V)^{G}$ は有理函数体ではない (Swan [11])。$p = 17, 19, \cdots$ $l=1$ 等は $\mathfrak{a}$ が単項になっている。これらの場合はすべて $\mathbb{Q}(\zeta_{p-1})$ の class number が 1 の場合だけのようである。

3° 応用

π を finite cyclic group とする。

g-$\mathrm{pic}(\mathbb{Z}\pi) = \{[I] \mid I : g\text{-}p\text{-module かつ projective}\}$

とおくと g-pic$(\mathbb{Z}\pi)$ は pic$(\mathbb{Z}\pi)$ の subgroup である。$\mathbb{Q}\pi$ の $\mathbb{Z}\pi$ を含む maximal order を $\mathcal{O}$ とする。

$[I] \longrightarrow [I \otimes_{\mathbb{Z}\pi} \mathcal{O}]$ で homomorphism

$$\mathrm{pic}(\mathbb{Z}\pi) \longrightarrow \mathrm{pic}(\mathcal{O})$$

が決まり

定理1　$0 \to g\text{-pic}(\mathbb{Z}\pi) \to \mathrm{pic}(\mathbb{Z}\pi) \to \mathrm{pic}(\mathcal{O}) \to 0$

は exact.

注

$[I] \in g$-pic$(\mathbb{Z}\pi)$ のとき $\mathbb{Q}(I^{\times})^{\pi}$ が有理体かどうかは判らない。

定理2.　G を位数 p^{l} の cyclic group, g を生成元とする。$K = k'(x_1, \cdots, x_{p^l})$ に $gx_1 = x_2, \cdots, gx_n = x_1$ で G が作用しているとする。

$p > 2$ のとき $k \ni \zeta_p$ なら K^G は k' 上有理体。

$p = 2$ のとき $k \ni \sqrt{-1}$ なら K^G は k' 上有理体。

$p = 2,\ l \geq 3,\ k' = \mathbb{Q}$ なら K^G は決して有理体ではない。

S.

G を finite group, $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[G] \to I \to 0$ なる exact sequence を考える.

定理3. 次のことは同値である.

(i) $H^2(G, \mathbb{Z})$ は order が $n(G)$ に等しい元をもたない.

(ii) G は cyclic.

(iii) I は g-p-module である.

References

[1] R. G. Swan; Invariant rational functions ---. Inventiones Math., 7 (1969), 148-158

[2] K. Masuda; On a problem of Chevalley, Nagoya Math. J, 8 (1955), 59-63

[3] K. Masuda; Application of the theory of the groups of classes of projective modules ---- J. of Math. Soc. Japan, 20 (1968), 223~232

[4] 宮田; 不変式. 代数シンポジューム報告集, 1969. 18-42.