数理解析研究所講究録
第115巻 1971年 41-64

大型構造解析における数値計算法について

三菱重工　長崎研　志岐担夫

1. はじめに

船舶，航空機等の大型構造解析を対象として，最近，~~構造~~有限要素法に基く，構造解析用汎用プログラムが数多く（表-1に示すごとく）開発され始めている。[1]

筆者も，ここ数年，有限要素法による構造解析にたずさわって来たが，それらを通じて経験したこと，或いは文献等を通じて知り得た事柄について，特に計算法に関連した，数値計算Algorithm に重点を置いて，概説してみたい。

一般的に云って，大型構造解析に於る数値計算の特徴として

i) 対象構造が複雑で，Analeticalに解けず，数値計算によらねばならぬこと。

ii) 計算時の未知数も数百ないし数千と次数の高いこと。

iii) 類似の構造，荷重条件での計算頻度の高いこと。

iv) すみやかに答を出すこと。精度はどちらかと云えば2次的に考えられる。

v) 或程度の費用はかけることが出来る。

vi) 計算機に適したAlgorithmであること。

等が挙げられよう。今のところ，これらの特徴を持つものとして有限要素法があり，ここ当分の間は，本法が，大型構造解析の主要を占めるものと考えられる。

有限要素法は，原理的には簡単であるけれども，大型構造解析を対象とするとき，取扱う連立方程式は数百ないし数千元となる。よって，通常の数値解法では処理し得ず，効率の良い解法を求めて，単に数学的考察のみならず，構造解析全体としての見方に立って，種々の工夫がなされている。

以下，具体的に各種計算法について述べる前に，有限要素法による構造解析の手順につき，簡単にふれておきたい。

Ⓐ：構造のidealization
Ⓑ：Input Dataの準備
Ⓒ：Element Stiffness Cal.
Ⓓ：系全体の釣合方程式

$$\mathbb{K}\mathbb{X} = \mathbb{F} \qquad (1)$$

Ⓔ：Boundary Conditionの導入
Ⓕ：連立方程式(1)を解くこと。
Ⓖ：Element Stressの計算
Ⓗ：Print Output Data
Ⓘ：Output Dataの図示

通常Ⓒ～Ⓗまで計算機がやってくれる。実際はⒶ，Ⓑ，Ⓘに殆んど人手に時間を喰われ，費用的に云っても計算費は1/3～1/2程

度である。　一例を表－2に示す。

2. 大型構造解析に於ける各種数値計算法

2-1. Hyper Matrix 演算による法

1) 基本 Algorithm

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} \mathbb{K}_{11} & \mathbb{K}_{12} & \cdot & \mathbb{K}_{1n} \\ \mathbb{K}_{21} & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \mathbb{K}_{n1} & \cdot & \cdot & \mathbb{K}_{nn} \end{bmatrix}$$

○(1)式の係数行列 $\mathbb{K}$ を右図の通り In-Core 処理可能な小行列 $\mathbb{K}_{ij}$ に分割し、(1)を に取扱う。

○このとき解法としては Gaussian Elimination と同様の Algorithm を $\mathbb{K}_{ij}$ について行えば良い。

2) 特徴

○joint numbering に制約がないので、mesh の自動分割も容易となる。

○解き得る問題の大きさは、殆んど制限がない。

○load case が多くても同時処理が出来る。

3) 欠点

○計算時間が非常に長い。

4) その他

○ASKA がこの方法を採っている。

2-2. SØR : Successive Over Relaxation Method[2)]

1) 基本Algorithm

○出発値：$\mathbb{X}^{(0)}$（仮定）

○反復式：

$$x_i^{(k+1)} = -\left(\frac{\omega}{k_{ii}}\right)\left\{\sum_{j=1}^{i-1} k_{ij}\, x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} k_{ij}\, x_j^{(k)} - f_i\right\} - (\omega-1)\, x_i^{(k)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

i：$1 \sim n$

ω：加速係数（$1 \leq \omega \leq 2$）

2) 特徴

○joint numberingを自由に行える。

○$\mathbb{K}$が変らないのでsparsityを十分に生かせる。

○solidの様な剛な構造では，うまく使えば非常に早い。

3) 難点

○構造によっては発散し，解が得られないことがある。
（収束性の保証：$|k_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |k_{ij}|$が満足されているとはかぎらない。）

○ωの設定，収束の判定等使い方に多少の経験を要する。

○load caseの多いとき，同時処理が出来ない。

3-2. C.G.法[3)]

1) 基本Algorithm

○出発値：$\mathbb{X}^{(0)}$（仮定）

$$\left.\begin{aligned} &\mathbb{r}^{(0)} = \mathbb{f} - \mathbb{K}\,\mathbb{X}^{(0)} \\ &\mathbb{p}^{(0)} = \mathbb{r}^{(0)} \end{aligned}\right| \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

○反復式：$\alpha_k = (\mathbb{p}^{(k)} \cdot \mathbb{r}^{(k)}) / (\mathbb{K}\,\mathbb{p}^{(k)} \cdot \mathbb{p}^{(k)})$

$$
\left.\begin{aligned}
x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)} \\
r^{(k+1)} &= r^{(k)} - \alpha_k K p^{(k)} \\
\beta_k &= (K p^{(k)} \cdot r^{(k+1)}) / (K p^{(k)} \cdot p^{(k)}) \\
p^{(k+1)} &= r^{(k+1)} - \beta_k p^{(k)}
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (4)
$$

2) 特徴

○ joint numberingを自由に行い得る。

○ 係数行列Kが変らないので、non-zero elementのみ(i, j, k_{ij})の形で蓄えておけば、何度でも使える。

○ joint番号差に制約されないので、solid等の解析に使い易い。

3) 難点

○ 釣り橋等、剛でない構造では収束しないことが経験されている。

○ load caseの多いとき同時処理出来ない。

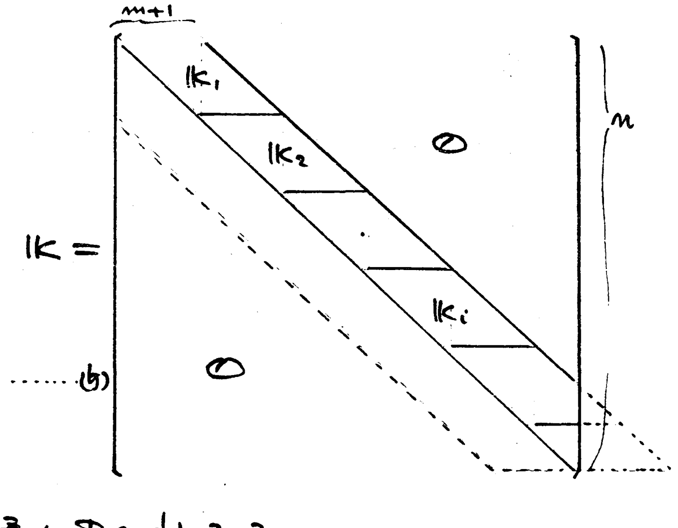
2-4. Band Method

1) 基本Algorithm

○ Element joint$(i$-j-$k)$の numberingに関し、

$\max(i-j, j-k, k-i) \leqq m/2$ ……(5)
(jointの自由度2の場合)

の制限を付する。このとき係数行列は右図の通りBandとなる。



- $\mathbb{K}$がpositive definiteであるので半分のみ，且つ$\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2 \cdots \mathbb{K}_n$と小行列に分けてstoreする。
- triangularization：

$$\mathbb{K} = \mathbb{L}^T \mathbb{D}^{-1} \mathbb{L} \quad \cdots\cdots (6)$$

$$\text{or.} \quad \left.\begin{aligned} l_{1i} &= k_{1i} \quad (i = 1 \sim m) \\ l_{ij} &= k_{ij} - \sum_{t=1}^{i-1} l_{ti} l_{tj} / l_{tt} \quad (i \le j \le n,\ i = 2 \sim m) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (6)'$$

- forward reduction：

$$(\mathbb{L}^T \mathbb{D}^{-1})\, \mathbb{Y} = \mathbb{F} \quad \cdots\cdots (7)$$

- backward reduction；

$$\mathbb{L}\, \mathbb{X} = \mathbb{Y} \quad \cdots\cdots (8)$$

2)特徴

- 非常に早く，確実に解が得られる。
- 精度も悪くない。
- load caseが多くても同時処理が出来る。

3)欠点

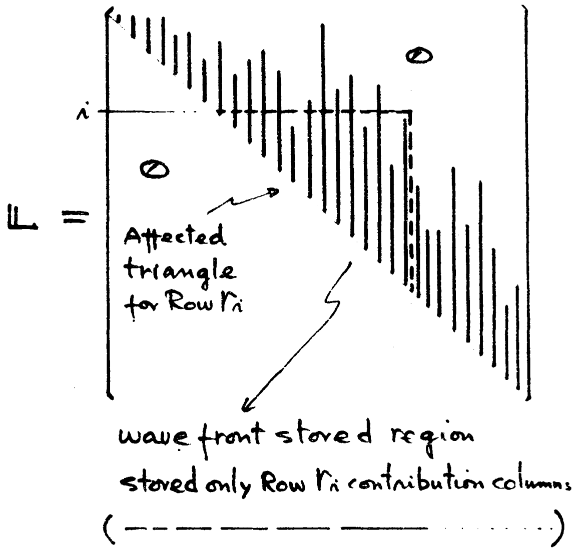
- joint numberingに余分の配慮が必要である。
- meshを細くとると，前の制約を溢れ構造も出て来る。

2-5. Wave Front 法[4)]

1)基本Algorithm

○ joint nubering と wave front が minimum になる様、付番する。

○ 係数行列 K を (6) で分解する。このとき L は（零要素が多いため）右図の様になる。



○ triangularization に際して、row element l_{ij} が以下の element に対する寄与 i.e. 点線でかこまれた要素の (6)式の第2項を、In-core に一次元 array として store しておき、次の row の decomposition に準備とする。

○ decomposition が済めば通常の forward & backward reduction による。

2) 特徴

○ 非常に早いところ（band 法の 1/2〜1/1）

3) 欠点

○ joint numbering に余分の配慮が要る。

○ プログラムが複雑となる。

○ あまり大きな構造は解けない（32kW Machine で Band 巾換算≒200）

2-6. Unit 分割法[5]（Matrix tri-diagonal Form）

1) 基本 Algorithm

。jointをUnit単位でgroup分けを行い，係数行列$\mathbb{K}$が右図の様にmatrix tri-diagonal formとなる様配慮する。[*1]

。このあと，通常のGaussian Eliminationにより解を得る。

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} \mathbb{K}_{11} & \mathbb{K}_{12} & & & \\ \mathbb{K}_{21} & \mathbb{K}_{22} & \mathbb{K}_{23} & & \\ & \mathbb{K}_{32} & \mathbb{K}_{33} & \mathbb{K}_{34} & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \mathbb{K}_{nn-1} & \mathbb{K}_{nn} \end{bmatrix}$$

2)特徴

。取扱える範囲がBand法の制約よりゆるい。

。計算時間も割合い早い。

。精度も悪くない。

。load caseが多くても，同時処理可能。

3)欠点

。inputの準備に手間がかゝる。

。meshを細いと，Unitの制約外となり解けぬ場合も生ずる。

2-7 Substructure法[6),7)]

1)基本Algorithm

。解かんとする構造を部分構造(substructure)単位で処理する。i.e.部分構造の内点を消去し，外点のみに関する剛性を求める。

---

*1. 実際にUnit分けと呼ばれて用いられている手法は，もう少し拡張されている。

○部分構造を系全体として集める。

○あとは、ほぼ前述の tri-diagonal form にて処理する。

2) 特徴

○構造解析者になじみやすい。

○substructure を数段階に level 分けすれば、さらに使い易すくなる。

○同じ構造部分があるとき、前の計算を流用出来る。

3) 欠点

○プログラムが煩雑となる。

○mesh を細いと、substructure の自由度が大きくなって、計算出来ない場合も起る。

2-8. 最小固有値の解法[8),9)]

最後に座屈の解析に必要な

$$\mathbb{A}\mathbb{X} = \lambda \mathbb{B}\mathbb{X} \quad \cdots\cdots (9)$$

の最小固有値の解法について述べる。

1) 基本 Algorithm

○出発値：$\mathbb{X}^{(0)}$（仮定）

○反復式：

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{Y}^{(k)} &= \mathbb{B}\mathbb{X}^{(k)} \\ \mathbb{A}\mathbb{X}^{(k+1)} &= \mathbb{Y}^{(k)} \\ \lambda^{(k)} &= (\mathbb{X}^{(k+1)} \cdot \mathbb{X}^{(k)}) / (\mathbb{X}^{(k+1)} \cdot \mathbb{X}^{(k+1)}) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (10)$$

ただし $X^{(k+1)}$ は適当に normalize して用いる。

2) 特徴

○元数の大きなものでも、容易に計算出来る。

○Band 法と組み合せれば、非常に早い。

○Algorithm を改良すれば、低次の固有値も求め得る。

3) 難点

○近接固有値のとき収束が悪くなる。

○したがって、計算時間の予測がつけ難い。

3. 計算例

以上、種々の計算法について述べたが、1〜2具体例を示すこととする。

3-1. ピストン・クラウンの熱応力解析[10]

図-1 参照のこと。

3-2. 内燃機関架構・台板の強度解析[11]

図-2 参照のこと。

3-3. タンガーTrans Ringの座屈解析[12)]

図-3〜-9. 参照のこと。

4. あとがき

終りに当って、大型構造解析の問題点について、今後の方向を述べてみたい。

大型構造物の強度解析に於て、数値解析が、従来の実験に代るものとして、今後ますます用ひられる様になると思はれる。

一方使用計算機の記憶容量は、これに十分見合うだけ増すとは考えられない。したがって、今後とも、数値計算Algorithm，各種テクニックの開発が必要とされるであろう。中でも、膨大なInput & Output Dataの処理を如何にうまく行うかが、現在の最大の問題点の一つである。このためには、数学的なAlgorithmのみでなく、具体的にPhysical Meaningまで考えて、場合によっては、専用のHardware等を開発し、問題に適する処置をとらねば、解決は困難の様である。

また、これとは別に、計算機の使用桁数に関連して、計算精度が明確にされねばならない[13)]。

その他、1つ2つテーマを挙げるとすれば、

i) Hyper Matrix Formによる各種Matrix Operation Module

ii) Non-zero element Matrix Form による各種 Matrix Operation Module

等をライブラリーとして整備しておくのも有用であろうと考えられる。

種々に資料を提供して頂いた、当所、三原，国分，諸田，和田，倉本の各氏に感謝致します。

[参考文献]

1). 岩崎「従来における大型構造解析汎用プログラム・システム」日本造船学会誌 第486号 p596 昭44-12

2) 川股，塩尾「反復法による構造釣合方程式の解法」大次元行列の計算に関する研究会論文集 p34 '70-4-24,25 東大

3) 戸川「多元連立一次方程式の解法」JSSC vol4 No.35 '68

4) Melosh, et. al. "Efficient Solution of Load Deflection Equations" Proc. ASCE, ST4 p661~676 April '69

5). 信原「FRAN概要」JSSC vol.3 no.19 '67

6) Smith, et. al "Practical Considerations in the Applications of Finite Element Technique to Ship Structures" ISD, ISSC Symposiumn on FEM. June '69 Stuttgart Univ.

7). Taig, I.C. "Automated Stress Analysis Using Substructures" 1st Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson

AFB, '66, AFFDL-TR-66-80

8) 戸川他「行列の最小固有値の一計算法」航技研 TM-132 昭43-5

9) 大坂「大型行列の最小固有値問題の一数値解法」大次元行列の計算に関する研究会論文集 p77, '70-4-24.25 東大

10) 三原, 川合, 諸田, 平田「高速ディーゼル機関ピストンの熱光弾性による熱応力解析」三菱重工技報 vol.7, no.2 昭45

11) 高垣, 河野, 小野, 和田, 島田「機関架構台板の構造に関する研究」三菱重工技報 vol 7. no. 1 昭45

12) 志岐, 田口, 倉本, 永元「有限要素法による船体底圧強度解析に関する研究」西部造船会会報 第40号 p115 昭45-7

13) Melosh, R.J. & E.L. Palacol "Manipulation Errors in Finite Element Analysis of Structures" NASA CR-1385 Aug. '69

名称	開発時期	開発場所及び担当者	計算機	内容								備考
				基礎理論	弾性	塑性	座屈	振動	I/O Gen.	連立方程式	最大自由度	
SAMIS	1965	米国 NASA Melosh	IBM7094	変位法	○	○	○	○	なし	Wave Front SOR	10,000	
FØRMAT	1968	米国 USAF Douglas	IBM7094 (GE635)	応力法	○	○	○	○	汎用 Display	Gauss 法	2,000	
STRUDL	1969	米国 IBM MIT	IBM 360/65	変位法	○	○	○	○	なし	Gauss	Unlimited	計算時間長い。
MAGIC	1969	米国 NASA Bell Aerosys.	IBM7094	変位法	○	○	○	○	なし	cholesky 法	2,000/Unit	
NCRE プログラム	1968~	英国 NCRE Kendrick	?	変位法	○	—	—	?	なし	Gauss (Substructure)	Tankerの3 Tank程度	軍用のため未公開
DAISY	1969	米国 Arizona Proj. Kamel	CDC6600 (6400)	変位法	○	○	—	—	Tankerのみ	Gauss	6,500	
ASKA	1970	西独 Stuttgart Argyris	CDC6600 (U.1108) (IBM360/65)	変位法	○	○	○	○	Topological Variable	Gauss C.G. SOR	Unlimited	計算時間長い。
SESAM'69	1970~	ノルウェー Norske Veritas	Univ.1108	変位法	○	○	○	○	有り	Cholesky	5000(?)	船舶用のプログラム群

○：有　—：無し

表-1　有限要素法大型構造解析用プログラム

作業アイテム	所要時間	所要経費比率
Ⓐ 構造のidealization	20 hr	15 %
Ⓑ Input Dataの準備	50 hr	37 %
Ⓒ Input Read, Check & El. Stiffness	20 MIN*1	6 %
Ⓓ 系全体の釣合方程式	15 MIN	5 %
Ⓔ Boundary Conditionの導入		
Ⓕ 連立方程式の解法	25 MIN	8 %
Ⓖ Element Stress	5 MIN	2 %
Ⓗ Output Data	15 MIN	5 %
Ⓘ Output Dataの図示	30 hr	22 %

*1. IBM 7040 Exec. Time

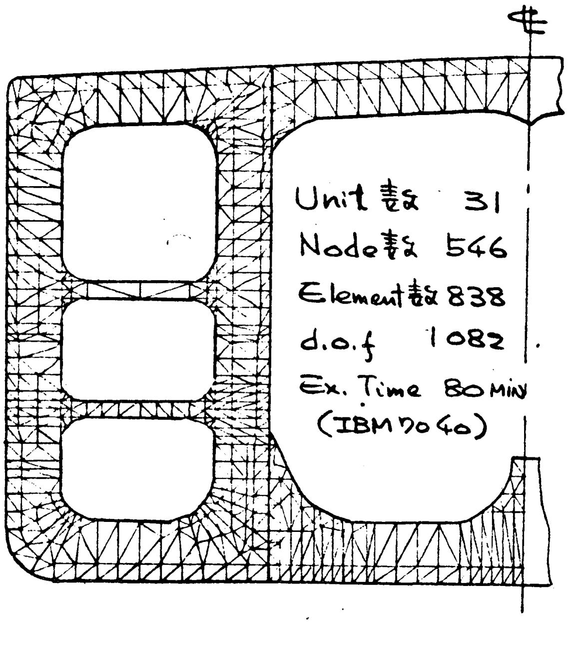


表-2 大型構造解析の所要経費比率

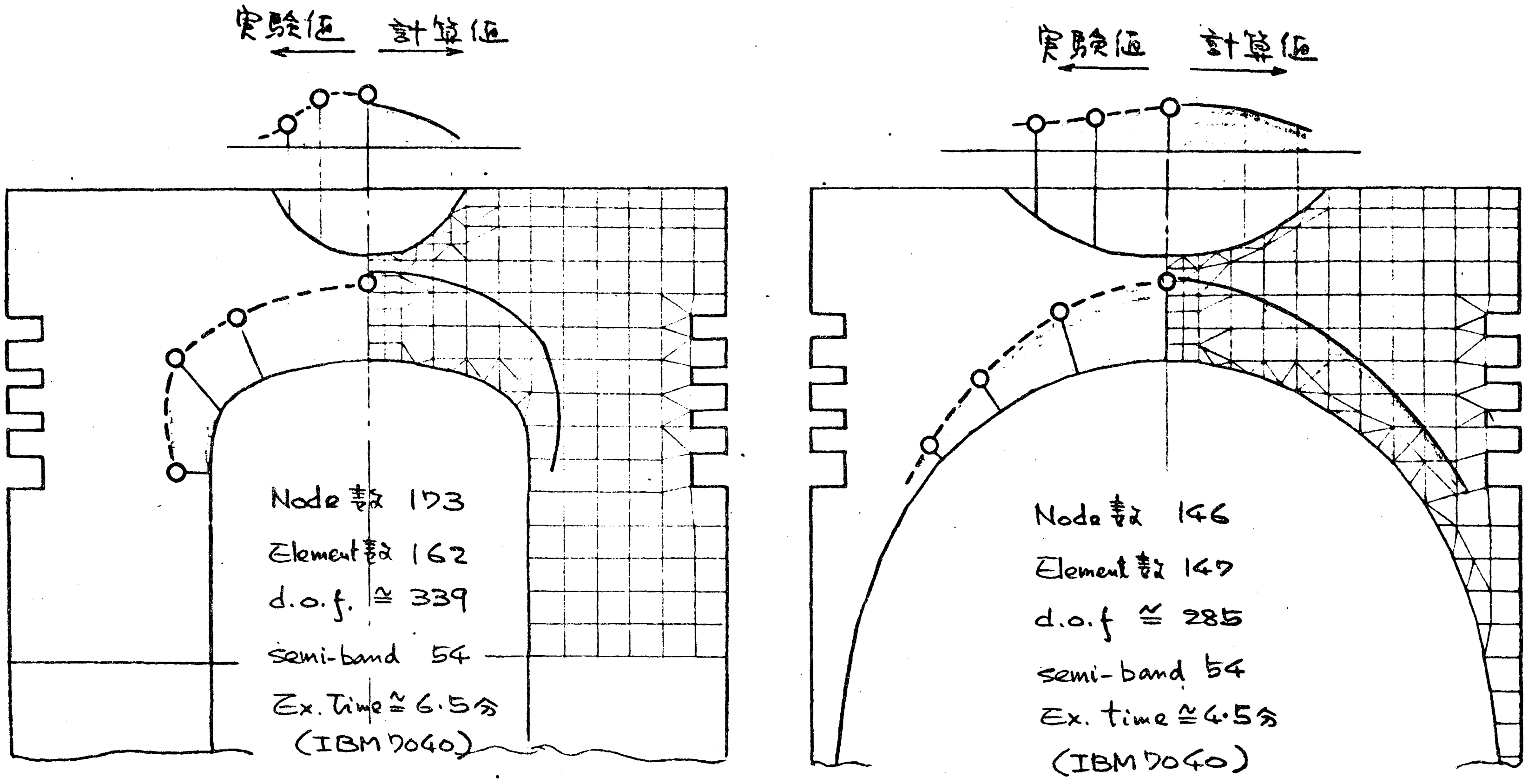


図-1　自動車用高速ディーゼルピストンの熱応力解析例

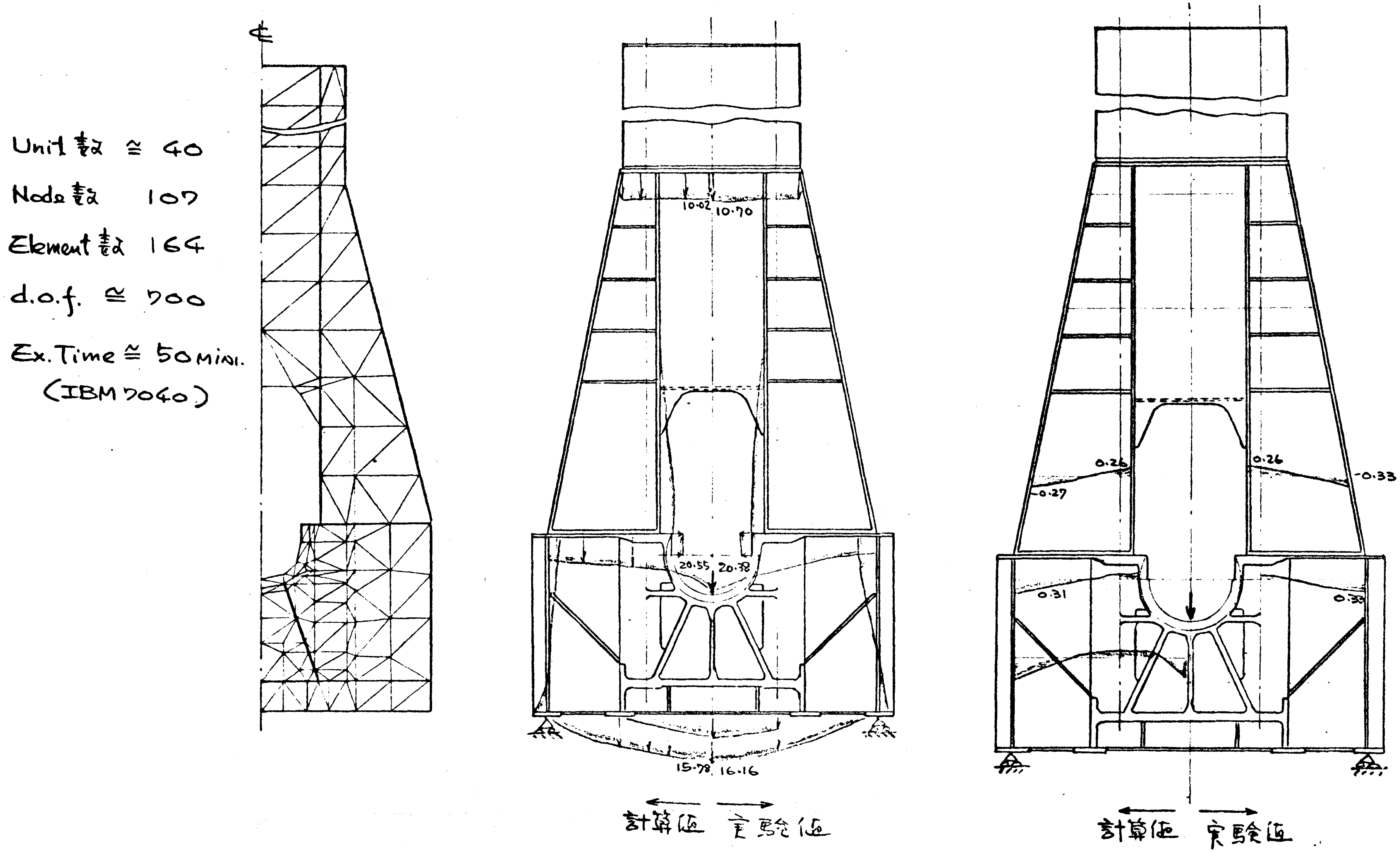


図-2 内燃機関 架構台板の解析例

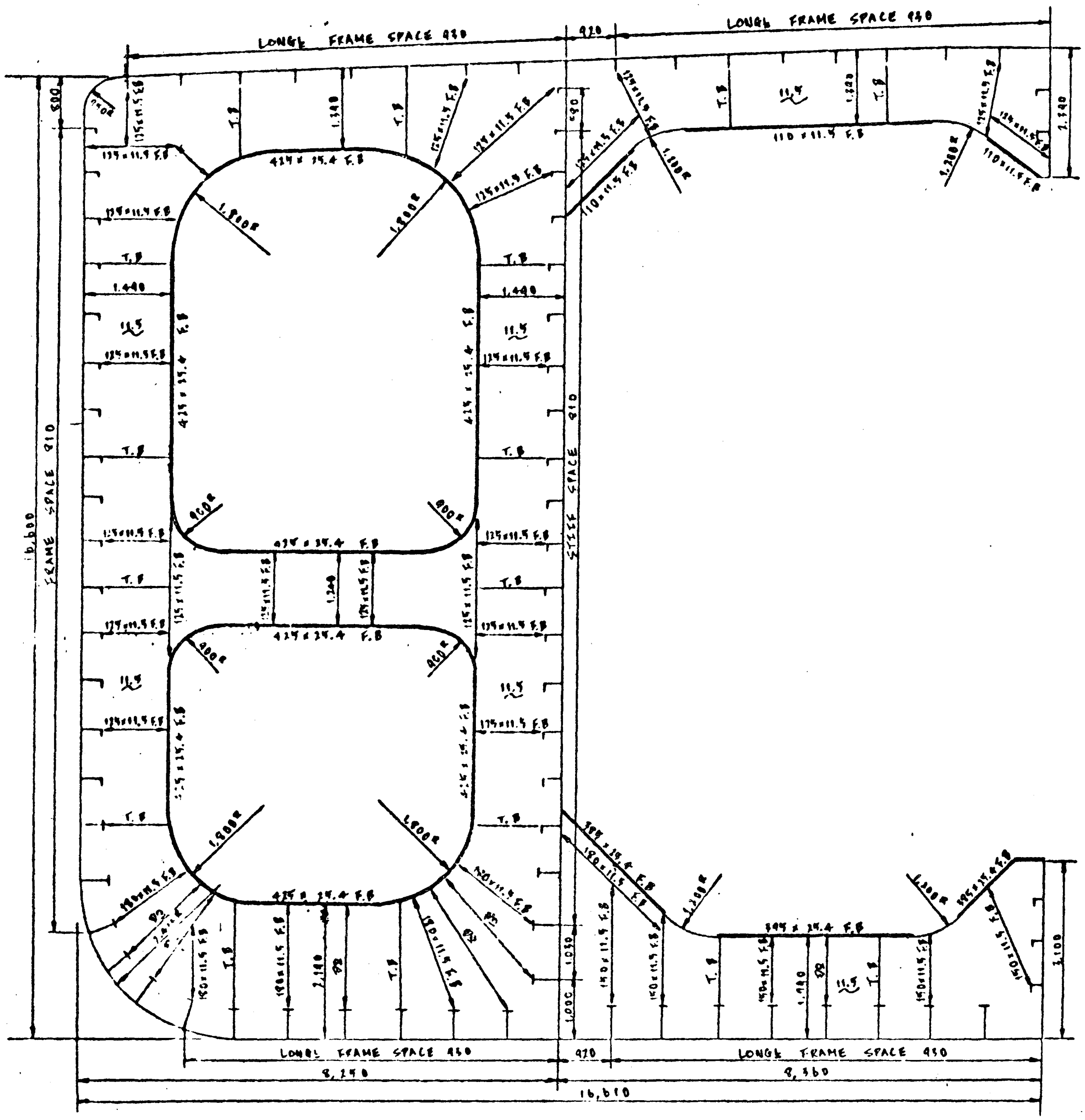


図-3 Case.1 Midship Section

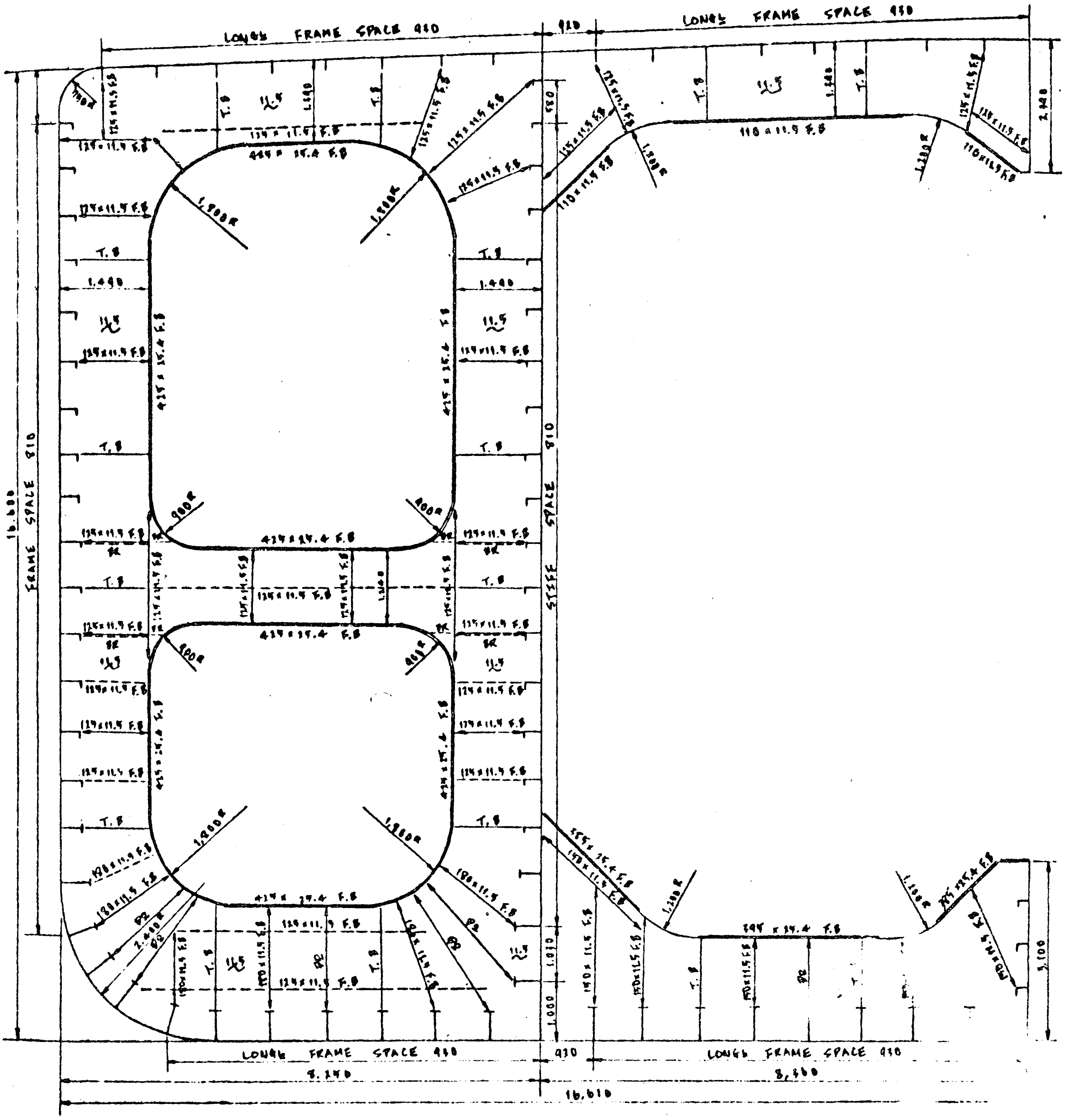


図-4 Case.2 Midship Section

——外力条件——

水圧: 1.35d …… 大骨桁材に対する NK-Rule [illegible]

剪断力分担割合

船側外板: 45%

縦通隔壁: 42%

船底中心桁: 13%

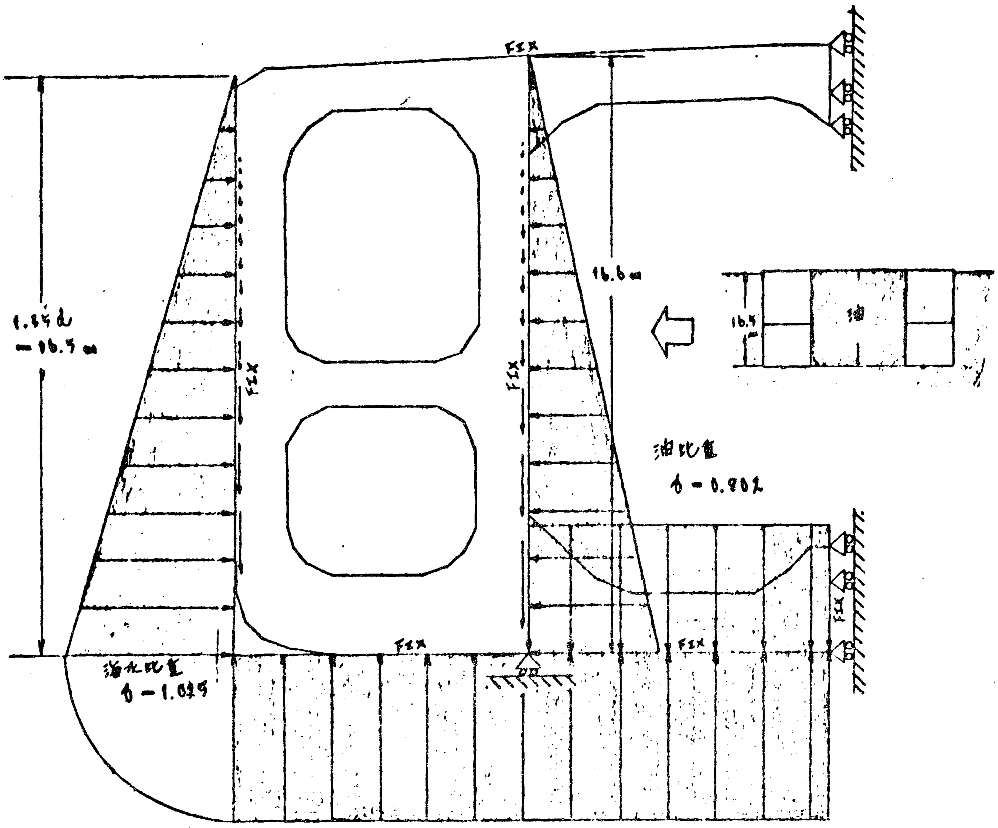


図-5 Load Condition

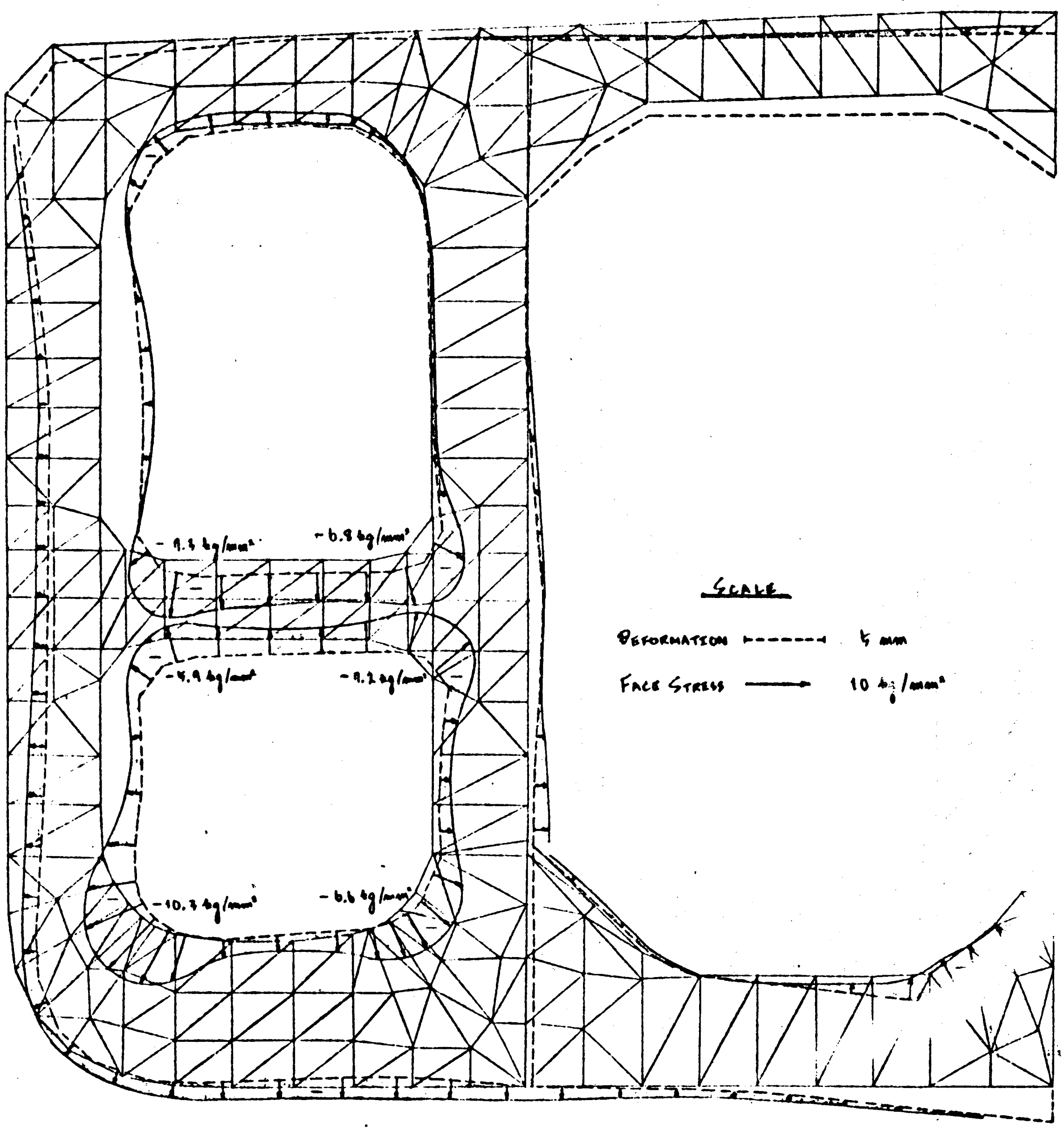


図. 6 Case.1 & Case 2 Deformation and Face Stress

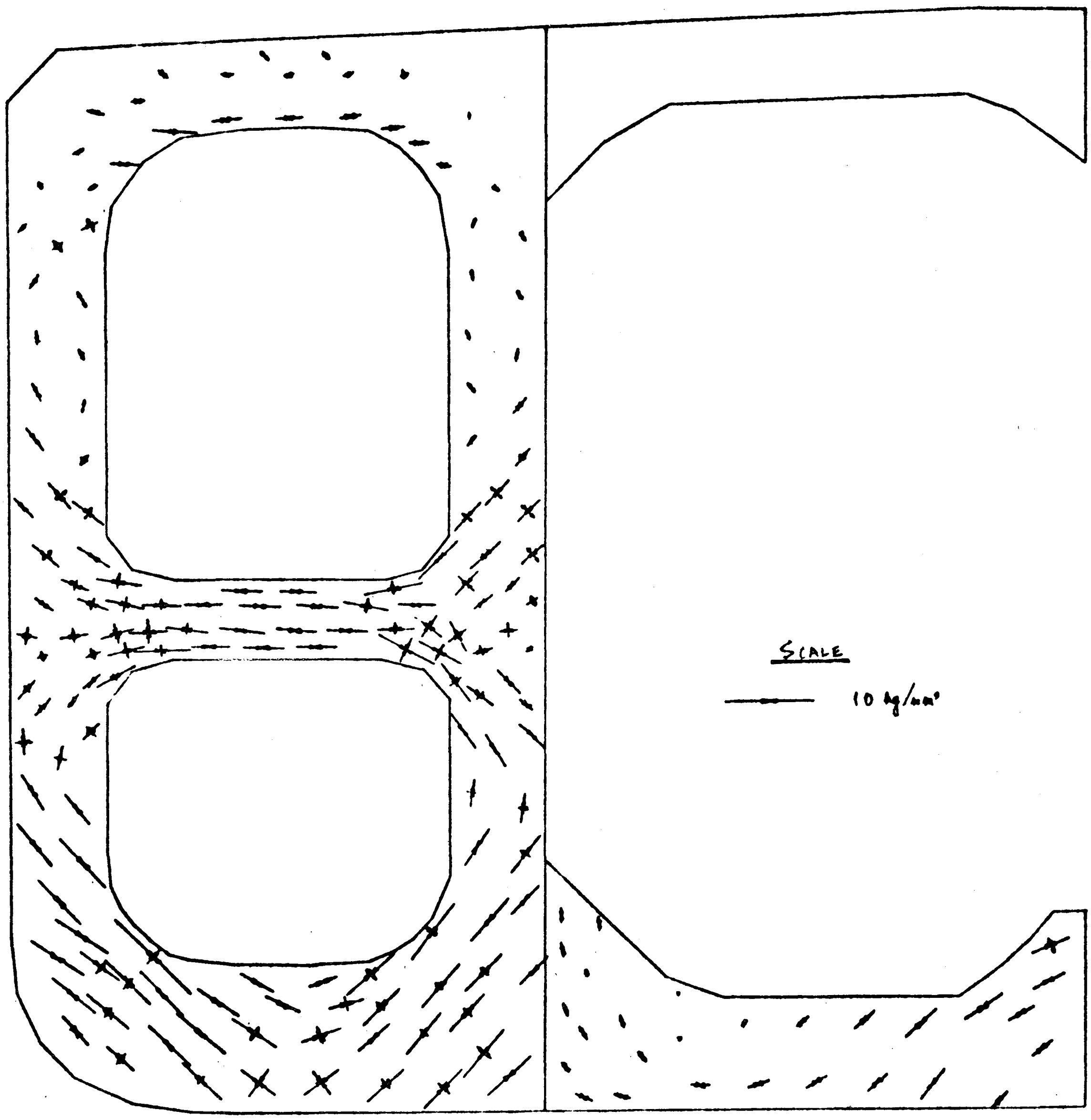


図-19 Case 1 & Case 2 Principal Stress on Web Plate

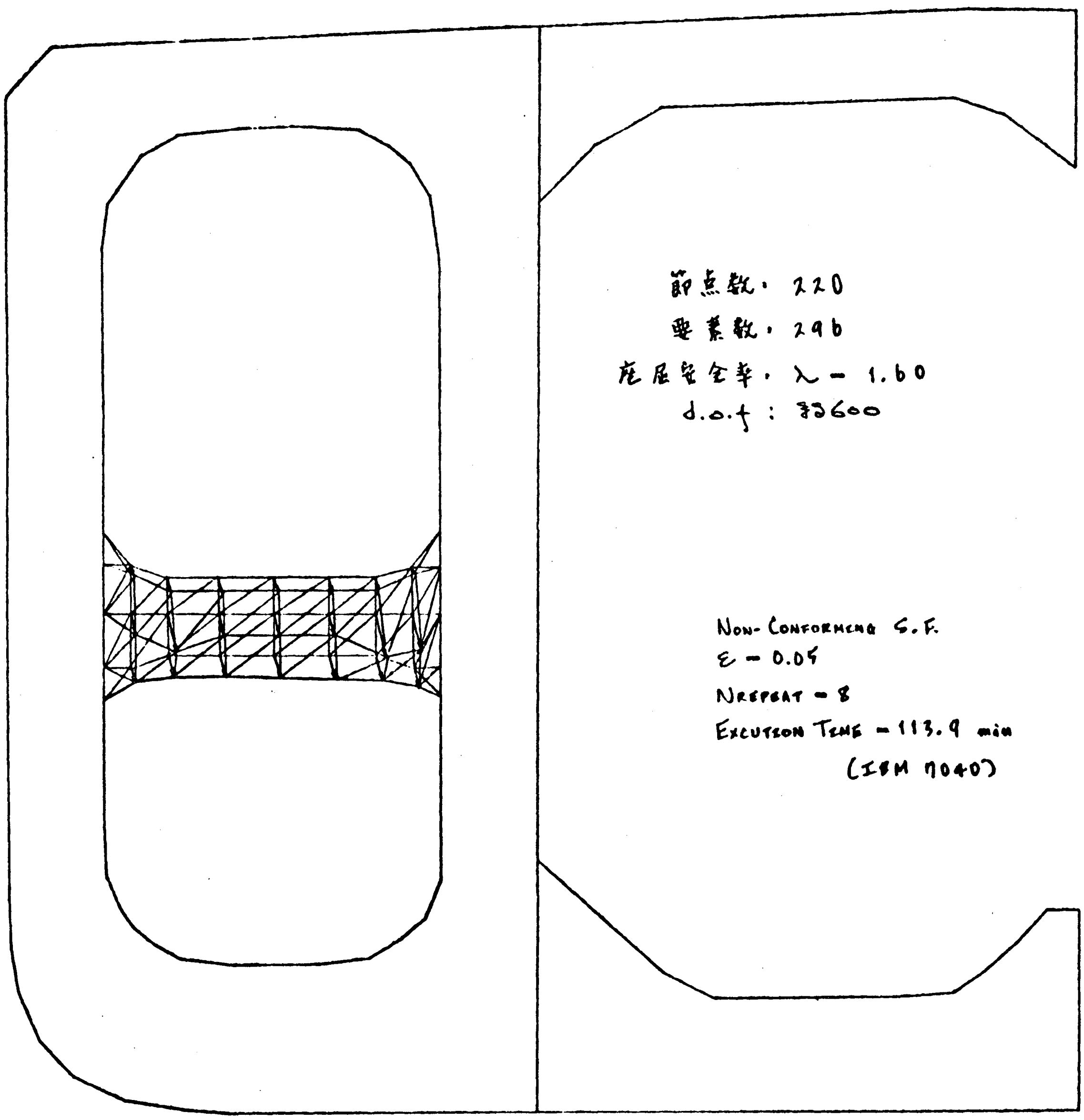


図-8 Case.1 Buckling Mode

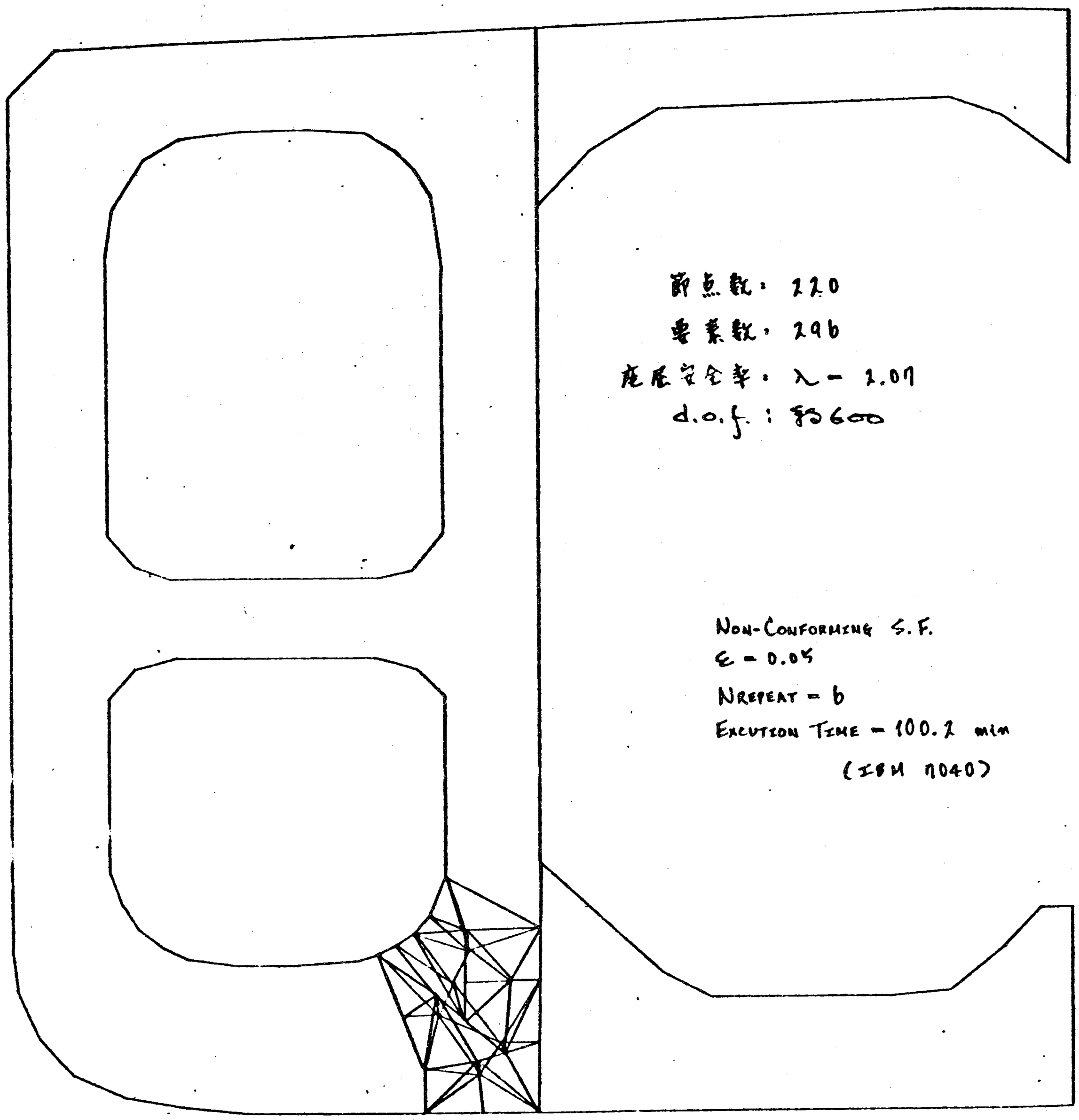


図-9 Case.2 Buckling Mode