数理解析研究所講究録
第116巻 1971年 33-44

線織面の自己同型群について.

京大理　丸山正樹

§1　序

代数的多様体の自己同型群に"代数群"の構造(連結成分の数が可算無限個かもしれない)が自然に入るのは古くから知られている. また, n次射影空間$\mathbb{P}^n$の非特異超曲面の自己同型群の計算は, [6]において詳しく述べられている. ところで代数曲面の場合を考えてみると, 自己同型群の連結成分(単位元を含むもの)の線型部分が自明でない時, その曲面が線織面に双有理になり, 線型部分が自明で連結成分の次元が1ならば楕円曲面, 次元が2ならばアーベル多様体になる[4].

この小論の目的は線織面の自己同型群を計算し, その応用を述べることにある. いずれどこかに発表するつもりなので詳しい証明などは述べない.

以下kを任意標数の代数的閉体, Xをk上定義された完備な非特異既約代数曲線とする. (S, X, π)でX上の線織面S

と，S から X への自然な射影 π (i.e. $S \xrightarrow{\pi} X$, $\pi^{-1}(x) = \mathbb{P}^1$, $\forall x \in X$) の組を表わす．$\mathrm{Aut}(S)$ を S の自己同型群，$\mathrm{Aut}_X(S) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(X) \mid \sigma\circ\pi = \pi\}$ とする．$\mathrm{Aut}^\circ(S)$, $\mathrm{Aut}^\circ_X(S)$ 等でそれぞれの単位元を含む連結成分を表わす．

主目標は，線織面 (S, X, π) について $\mathrm{Aut}(S)$ を求めることにあるが，方針は次の様である：よく知られている様に線織面 (S, X, π) が与えられた時，X 上階数 2 のベクトルバンドル E が存在して，$(S, X, \pi) \cong (P(E), X, \pi')$ となる．そこで，まず $\mathrm{Aut}(E)$ を調べ，次に $\mathrm{Aut}_X(P(E))$ を調べ，最後に $\mathrm{Aut}(P(E))$ まで持っていく．それぞれ途中を適当な補題でつなぐわけである．

§2 $\mathrm{Aut}(E)$.

E を X 上の階数 2 のベクトルバンドルとする．E の階数 1 の部分バンドルの全体を考えると，その degree は上に有界である．そこで最大の degree を持つ部分バンドルを極大部分バンドルと言い，その degree を $M(E)$ で表わす．$N(E) = \deg E - 2M(E)$ とおく．

定理 1． E を X 上の階数 2 のベクトルバンドルとする．

(1) $N(E) > 0 \Longrightarrow \mathrm{Aut}(E) \cong G_m$

(2) $N(E) \leqq 0$, E indecomposable, L 極大部分バンドル (こ

の場合は一意的) $\Longrightarrow$ $\mathrm{Aut}(E) \cong H_r$

ここで，$r = \dim \Gamma(X, (\underline{\det E})^{-1} \otimes \underline{L}^2)$ ，

$$H_r = \left\{ \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & t_1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \alpha & t_r \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \right) \in GL(2,k) \times \cdots \times GL(2,k), \;\middle|\; \begin{matrix} \alpha \in G_m \\ t_i \in k \end{matrix} \right\}$$ とおく。

(3) $E \cong L_1 \oplus L_2$ ，$\deg L_1 \geqq \deg L_2$ ，$L_1 \not\cong L_2 \Longrightarrow \mathrm{Aut}(E) \cong H'_r$

ここで，$r = \dim \Gamma(X, (\underline{\det E})^{-1} \otimes \underline{L}_1^2)$ ，

$$H'_r = \left\{ \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & t_1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \alpha & t_r \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \right) \in GL(2,k) \times \cdots \times GL(2,k) \;\middle|\; \begin{matrix} \alpha, \beta \in G_m \\ t_i \in k \end{matrix} \right\}$$

とおく。

(4) $E \cong L \oplus L \Longrightarrow \mathrm{Aut}(E) \cong GL(2,k)$。

証明には次の補題を使う．少し工夫がいるがそれほど難しくない。

補題 1　E を定理 1 と同じとし，L_1, L_2 を E の極大部分バンドルで互に異るとする $\Longrightarrow E \cong L_1 \oplus L_2$.

この補題は [2] の補題 1.5 である．

§ 3．$\mathrm{Aut}_X(S)$

(S, X, π) を線織面とする．X 上の階数 2 のベクトルバンドル E が存在して，$(S, X, \pi) \cong (P(E), X, \pi')$ となる．すなわち $\exists \varphi : S \xrightarrow{\sim} P(E)$，$\pi = \pi' \cdot \varphi$ となる．次の補題は A. Grothendieck によるものである [1]

補題2、Eを連結な局所ネーター前概型Y上のベクトルバンドルとする。$\Delta = \{\bar{N} \mid \bar{N}$はE$\otimes$N$\cong$Eとなるような階数1のベクトルバンドルの同型類$\}$とおく。この時、次の完全系列がある；

$$e \longrightarrow \mathrm{Aut}(E)/\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y^*) \longrightarrow \mathrm{Aut}_Y(P(E)) \longrightarrow \Delta \longrightarrow e .$$

我々の場合は、Y=Xだから $\Gamma(X, \mathcal{O}_X^*) = G_m$, で$\Delta$はJacobi多様体の2-torsion partの部分群になる。Δについて次の補題がある。

補題3 (1) $N(E) \leqq 0$, $N^2 \cong I$（自明なバンドル）となる任意のバンドルについて $E \ncong L \oplus (L \otimes N) \Rightarrow \Delta = \{e\}$

(2) $E \cong L \oplus (L \otimes N)$, $N^2 \cong I$, $N \ncong I \Rightarrow \Delta \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

(3) $E \cong L \oplus L \Rightarrow \Delta = \{e\}$.

P(E)のsection s が最小のself-intersection numberを持つ時、それをminimal-sectionと呼ぶ。sがminimal sectionとすると $(s \cdot s) = N(E)$ （N(E)はP(E)にのみよる。以下N(P(E)), N(S)の記号を使う。またminimal-sectionとEの極大部分バンドルの間に一対一対応がつき、Lを極大部分バンドルとすると、

$(\det E) \otimes L^{-2}$がきめるX上のdivisor class $= \pi(s \cdot s)$ （sとsとの交わりをXの上に射影したdivisor class）

したがって、補題2，3を使うと定理1は次の定理2の形になる。

定理2. (S, X, π) を線織面とする.

(1) $N(S) > 0 \Rightarrow \mathrm{Aut}_X(S) \cong \Delta$, Δは補題2の中で定義された有限群($\subseteq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus g}$, gはXの種数)ただし, 補題2のEは,ここでは$(P(E), X, \pi') \cong (S, X, \pi)$となるもの.

(2) $N(E) \leqq 0$, S indecomposable (i.e. $(S, X, \pi) \cong (P(E), X, \pi')$ となるEがindecomposable) $\Rightarrow \mathrm{Aut}_X(S) \cong \underbrace{G_a \times \cdots \times G_a}_{r}$,
$r = \dim|-\pi(\Delta \cdot \Delta)|+1$, ΔはSの一意的なminimal section.

(3) S : decomposable で $\pi(\Delta \cdot \Delta) = \pi(\Delta' \cdot \Delta')$ となるような異なる minimal sections Δ, Δ' を持たない $\Rightarrow \mathrm{Aut}_X(S) \cong \bar{H}'_r$.
ここで, $r = |-\pi(\Delta \cdot \Delta)|+1$, Δ minimal section, $\bar{H}'_r =$
$$\left\{\left(\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha & t_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}\alpha & t_r\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) \middle| \begin{array}{c} t_1, \dots, t_r \in G_m \\ \alpha \in k \end{array}\right\}.$$

(4) S : decomposable, $S \not\cong \mathbb{P}^1 \times X$, Sは$\pi(\Delta \cdot \Delta) = \pi(\Delta' \cdot \Delta')$となるような異なるminimal-sectionsをもつ $\Rightarrow \mathrm{Aut}_X(S) \cong \left\{\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \middle| \alpha \in G_m\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix}0 & \beta\\ 1 & 0\end{pmatrix} \middle| \beta \in G_m\right\}$. ただし積は行列の積として演算し, さらに適当なスカラーで割って上の群に入るようにする.

(5) $S \cong \mathbb{P}^1 \times X \Rightarrow \mathrm{Aut}_X(S) \cong PGL(1, k)$.

§4 Aut(S)

次の補題は明らかであろう.

補題4 (S, X, π) を線織面とし, $S \not\cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ とする. この時次の完全系列がある.

$$e \longrightarrow \mathrm{Aut}_X(S) \longrightarrow \mathrm{Aut}(S) \xrightarrow{f} \mathrm{Aut}(X).$$

実は，代数的多様体の自己同型群は本来，自己同型関手を表現するものとしてとらえるべきである．kは閉体であり，S, Xは完備であるから $\mathrm{Aut}(S)$, $\mathrm{Aut}(X)$ は $(Sch/k)_{red}$ 上での関手を表現するものである[6]．また $\mathrm{Aut}_X(S)$ も関手 $\mathcal{A}ut_{S/X}(T) = \ker(\mathcal{A}ut_S(T) \longrightarrow \mathcal{A}ut_X(T))$ を表現する．したがって，上の完全列は代数群としての完全列である．(i.e. 代数群として $\ker f \cong \mathrm{Aut}_X(S)$)．

Xの種数が2以上であれば$\mathrm{Aut}(X)$は有限群であるから，$\mathrm{Aut}^\circ(S)$ を考える限りにおいて問題はない．また，[2]で調べた命題を使えば，Xが楕円曲線で $N(S) > 0$ ならば $\mathrm{Im}\, f$ が有限群であることがわかる．

したがって，残ったのは次の場合である．

(1) $S \cong \mathbb{P}^1 \times X$

(2) X 有理曲線，$S \not\cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

(3) X 楕円曲線，S indecomposable

(4) X 楕円曲線，S decomposable, $N(S)=0$, さらに $S \not\cong \mathbb{P}^1 \times X$.

(1)の場合は $X \not\cong \mathbb{P}^1$ ならば $\mathrm{Aut}(S) \cong \mathrm{Aut}(X) \times PGL(1)$ となり $X \cong \mathbb{P}^1$ ならば $\mathrm{Aut}(S) \cong \{PGL(1) \times PGL(1)\} \cup \{V(PGL(1) \times PGL(1))\}$.
ここで，Vは $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \ni (x,y) \longrightarrow (y,x) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ なる自己同型であ

る．

(2)に含まれる曲面は，所謂 Hirzebruch surface Σ_n $(n>0)$ であり，(3)に含まれる曲面は２つの同型類 $\mathbb{P}_0$，$\mathbb{P}_{-1}$（Atiyah の記号，我々は[2]において P_0，P_1 なる記号を使った）がある．また(3)に含まれるものは $\mathbb{P}^1$ で parametrize されている．

次の補題が基本的である．

補題５．(i) 上の(2)と(3)の場合には，補題４の f は全射である．

(ii) 上の(4)の場合，s と S の minimal section として $\pi(s\cdot s)=x_0-x$ とおく，ここで，x_0 を X のアーベル多様体としての単位元とする．この時，$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Aut}^\circ(X)\cup(\varphi_0 \mathrm{Aut}^\circ(X))\cup(\varphi_1 \mathrm{Aut}^\circ(X))\cup\cdots\cup(\varphi_r \mathrm{Aut}^\circ(X))$，ただし，$\varphi_0$（または φ_i, $1\leq i\leq r$）は $\varphi_0(y)=-y$（または，$\varphi_i(x)=x$ $1\leq i\leq r$）となるような，X をアーベル多様体とみての自己同型．

証明には[2]で述べた elementary transformation によるモデルの構成法を使う．

さて，f が全射になっても代数群の射としては全射でないかもしれない．すなわち，f が分離的であるかどうかを見なければならない．そのために，$\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}^\circ(S)) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}^\circ(X))$ を調べる必要がある．前の $\mathcal{A}ut_S$ を表現する群概型が被約であるならば，$\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}^\circ(S)) \cong H^0(S, \Theta_S)$ であるから，$H^0(S, \Theta_S)$ を計

算して，f_* を調べればよいことになる．問題の群概型が被約かどうか，言いかえれば $\mathrm{Aut}(S)$ が $\mathcal{A}ut_S$ を表現するかどうかは，$\dim H^0(S,\Theta_S)=\dim \mathrm{Aut}(S)$ が成立つかどうかによっている．そこで，$H^0(S,\Theta_S)$ を計算してみると次の様になる．

補題6　(S,X,π) を線織面とする．k の標数を p とする．

(1)　X：有理曲線，$N(S)=-n$ $(n\geqq 0)$ とする．

a)　$n\neq 0 \Longrightarrow \dim H^0(S,\Theta_S)=n+5$.

b)　$n=0$ (i.e. $S\cong \mathbb{P}^1\times X$) $\Longrightarrow \dim H^0(S,\Theta_S)=6$.

(2)　X：楕円曲線，$N(S)=-n$ $(n\geqq -1)$ とする．

c)　$p\nmid n$，$n\neq 0,-1 \Longrightarrow \dim H^0(S,\Theta_S)=n+1$

d)　$p\mid n$，$n\neq 0,-1 \Longrightarrow \dim H^0(S,\Theta_S)=n+2$

e)　$n=0$，S decomposable，$S\not\cong \mathbb{P}^1\times X \Longrightarrow \dim H^0(S,\Theta_S)=2$.

f)　$n=0$，S indecomposable (i.e. $S\cong \mathbb{P}_0$)，$p\neq 2$
$\Longrightarrow \dim H^0(S,\Theta_S)=2$

g)　$n=0$，S indecomposable，$p=2 \Longrightarrow \dim H^0(S,\Theta_S)=3$.

h)　$n=-1$，(i.e. $S\cong \mathbb{P}_{-1}$) $\Longrightarrow \dim H^0(S,\Theta_S)=1$.

i)　$S\cong \mathbb{P}^1\times X \Longrightarrow \dim H^0(S,\Theta_S)=4$.

さて，上の結果と定理2，補題4，5を考慮に入れると，上の(d)，(g)の場合に $\mathrm{Aut}(S)$ が $\mathcal{A}ut_S$ を表現していないことがわかる．また問題の f_* が全射になるのは，(a)(b)(e)(f)(i)と(h)で $p\neq 2$ の場合であることが，$H^0(S,\Theta_S)$ の元の具体的な形を

みることによりわかる.

定理 3. (S, X, π) を線織面とする.

(1) X: 有理曲線, $N(S)=n$ $(n>0)$ $\Rightarrow$ 次の代数群としての完全系列*) がある;

$$e \longrightarrow \overline{H}_{n+1} \longrightarrow \mathrm{Aut}(S) \longrightarrow PGL(1) \longrightarrow e.$$

(2) X: 楕円曲線, S: decomposable, $N(S)=0$, $S \neq \mathbb{P}^1 \times X$ $\Rightarrow$ 次の代数群としての完全系列がある:

$$e \longrightarrow G \longrightarrow \mathrm{Aut}(S) \longrightarrow \mathrm{Aut}'(X) \longrightarrow e,$$

ここで, $\mathrm{Aut}'(X)$ は補題 5 の(ii)で定義した群であり, G は定理 2 の(3)の条件をみたすかどうかによって G_m か定理 2 の(4)の群かのいずれかである. さらに, $\mathrm{Aut}^0(S)$ は, Δ_1, Δ_2 を S の minimal section として $S-\Delta_1-\Delta_2$ に自然に可換群の構造を入れたものである.

(3) X: 楕円曲線, $S \cong \mathcal{P}_0$ $\Rightarrow$ 次の代数群の完全系列がある:

$$e \longrightarrow G_a \longrightarrow \mathrm{Aut}(S) \longrightarrow \mathrm{Aut}(X) \longrightarrow e,$$

さらに, $\mathrm{Aut}^0(S)$ は, Δ を S の minimal section として, $S-\Delta$ に自然に可換群の構造を入れたものである.

---

*) $e \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow e$ を代数群の系列とする. これが完全系列であるというのは, G' が G の代数群としての部分群であり, G/G' が代数群として G'' に同型であること.

(4) X: 楕円曲線, $S \cong P_{-1}$, k の標数は2でない

$\Longrightarrow$ 次の代数群の完全系列がある;

$$e \longrightarrow \Delta \longrightarrow \mathrm{Aut}(S) \longrightarrow \mathrm{Aut}(X) \longrightarrow e,$$

ここで, $\Delta \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. さらに, $\Delta \cap \mathrm{Aut}^0(S) = \Delta$.

証明は今までに述べてきたことを使えばほとんど問題ない. ただ, (4)の最後の主張は, $\mathrm{Aut}^0(S)$ の軌跡とファイバーとの交わりをみるために, 軌跡となりうる曲線をみつけなければならない. これには少しめんどうな計算がいる. また, (4)の場合で k の標数が2でも, Δ を X の 2-torsion part として, $\mathrm{Aut}(S)/\Delta \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ なる射はできるが, それは決して分離的にならない.

§5. 応用

次の問題を考えよう. "線織面が同時に楕円曲面になるのはいつか?" この問題は $k=\mathbb{C}$ の時諏訪氏 [7] によってとかれているが, 自己同型群の立場からみると, 一般の代数的閉体の場合でも自然にとける(序参照). 結果は次の通りである.

定理4. (S, X, π) を線織面, p を k の標数とする.

(1) S: 楕円曲面 $\Longrightarrow$ X: 楕円曲線

(2) $p=0$ ならば, S が楕円曲面になるための必要十分条件は次の条件(i),(ii)のいずれかを満足することである;

(i) $S \cong P_{-1}$

(ii) S decomposable, $N(S)=0$, s を S の minimal section として, $\pi(s\cdot s)$ が X の Jacobi 多様体で torsion element になっている.

(3) $p>0$ ならば, S が楕円曲面になるための必要十分条件は, 上の (i) (ii) か下の (iii) のいずれかを満足することである.

(iii) $S \cong P_0$

$S \cong P_{-1}$ の場合 multiple fibre を 3 本もち ((2, 2, 2) type), (ii) の場合 2 本もつ ((r, r) type, r は $r\pi(s\cdot s)=0$ となる最小のもの)

参考文献

[1] A. Grothendieck. Géométrie formelle geometrie algébrique, F.G.A.

[2] M. Maruyama. On classification of ruled surfaces, Lect. in Math. Dept. Math. Kyoto Univ. 3 Kinokuniya (Tokyo) 1970,

[3] M. Maruyama, On automorphism groups of ruled surfaces, to apper

[4] H. Matsumura, On algebraic groups of birational transformations, Rendiconti Accad. Naz. Lincei 34 (1963).

[5] H. Matsumura, P. Monsky. On the automorphisms of hypersurface. J. Math. Kyoto Univ. Vol 3 (1964).

[6] H. Matsumura, F. Oort, Representability of group functors,

and automorphisms of algebraic schemes, Inv. Math. 4 (1967).
[7] T. Suwa, On ruled surface of genus 1 J. Math. Soc. Japan 21 (1969)