数理解析研究所講究録
第 116 巻 1971 年 61-67

代数曲面上の vector bundle

名大 理　竹本史夫

序　　k を代数的閉体，X を k 上 non-singular 既約射影代数多様体とする。（以後，これを仮定する）次の問題を考える。rank と numerically chern class を定めた X 上の vector bundle 全体は，algebraic family に成るか？　つまり，k-algebraic scheme によって parametrize されるか。X が曲線の場合 indecomposable bundle に制限すれば，成り立つことが知られている（Atiyah [1]）。又，曲面の場合 indecomposable に制限するだけでは algebraic family にならない例がある（Atiyah [1]）。そこで Mumford [5] が曲線上の vector bundle の moduli を構成した際，定義した stable bundle の概念を拡張して，stable bundle に制限すれば，曲面上では algebraic family になる（定理）。

§1.　X が一般次元の場合

vector bundle と locally free sheaf of finite rank とを混同して用いる。だから line bundle は，rank 1 の locally free sheaf 又は 同じ事であるが invertible sheaf を意味する。任意の coherent sheaf $\mathcal{F}$ に対して，X についての仮定より，invertible sheaf $\mathrm{Inv}(\mathcal{F})$ が定義できる（first chern class Mumford [6]）。つまり $\mathcal{E}_\cdot$ を locally free sheaf $\mathcal{E}_i$ による $\mathcal{F}$ の finite resolution とすると，$\mathrm{Inv}(\mathcal{F}) = \bigotimes_i (\overset{\circ}{\wedge}\mathcal{E}_i)^{(-1)^i}$ ここで $\overset{\circ}{\wedge}$ は highest exterior power。そのとき，$\mathrm{Inv}(\mathcal{F})$ は自然な同型を除いて $\mathcal{F}$ にのみ依存する。次の事は容易にわかる。

i) もし $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ が coherent sheaf の exact sequence とすると，そのとき自然な同型 $\mathrm{Inv}(\mathcal{F}) \simeq \mathrm{Inv}(\mathcal{F}') \otimes \mathrm{Inv}(\mathcal{F}'')$ がある。

ii) もし $\mathcal{F}$ が locally free ならば，$\mathrm{Inv}(\mathcal{F}) = \overset{\circ}{\wedge}\mathcal{F}$。

iii) もし $\mathcal{F}$ が torsion sheaf ならば，$\mathrm{Inv}(\mathcal{F}) = \mathcal{O}_X(D)$。ここで D は positive Cartier divisor.

又，任意の coherent sheaf $\mathcal{F}$ に対して，$\mathcal{F}$ の rank が定義できる。つまり，ξ を X の generic point とする。$\mathrm{rank}(\mathcal{F}) = r(\mathcal{F}) = \dim_{\mathcal{O}_{X_\xi}} \mathcal{F}_\xi$。$\mathcal{F}$ が torsion であるのは，$\mathrm{rank}(\mathcal{F}) = 0$ のときのみである。

X が曲線の場合 stable の定義（Mumford [5]）

vector bundle E が stable とは，すべての non-trivial quotient <u>bundle</u> $\mathcal{F}$ に対して，$\delta(E) < \delta(\mathcal{F})$。ここで $\delta(E) = \deg(E)/r(E)$.

ところで，X が曲線の場合，任意の vector bundle は，line bundle の extension で表わされるが，X が2次元以上のときは，一般には quotient vector bundle は存在しないから，.

stableの定義を次の様にする。$\mathcal{H}$を very ample line bundle on X。 Xの次元を t とする。

定義　vector bundle E が $\mathcal{H}$-weakly stable (resp. $\mathcal{H}$-weakly semi stable) とは，すべての non-trivial, not torsion, coherent quotient sheaf $\mathcal{F}$ に対して，$\delta_{\mathcal{H}}(E) < \delta_{\mathcal{H}}(\mathcal{F})$ (resp. $\leq$)。
ここで，$\delta_{\mathcal{H}}(E) = (\mathrm{Inv}(\mathcal{F}) \cdot \mathcal{H}^{t-1}) / r(\mathcal{F})$　(,)は intersection number

Xが曲線の場合 locally free と torsion free とは同値となることに注意すれば，Mumfordの定義と我々の定義と一致することは容易にわかる。定義より次の性質は容易 (Mumford [5])。

1. line bundle は，必ず $\mathcal{H}$-weakly stable。
2. もし L が line bundle ならば，そのとき E が $\mathcal{H}$-weakly stable と $E \otimes L$ が $\mathcal{H}$-weakly stable とは同値。
3. もし E_1, E_2 が2つの vector bundle とすれば，$E_1 \oplus E_2$ は決して $\mathcal{H}$-weakly stable でない。
4. もし rank 2 の vector bundle が $\mathcal{H}$-weakly semi stable でないならば，そのとき $\delta_{\mathcal{H}}(\mathcal{F})$ が最小になる rank 1 の unique coherent quotient sheaf が存在する。

Prop. $\mathcal{H}$-weakly stable vector bundle は，simple である。
E が simple であるとは，E の global な endomorphism は constant だけ，i.e. $\Gamma(X, End(E)) = k$。証明は曲線の場合[7]と同様。

§2. 以下 X が曲面の場合. 前と同様に H を very ample line bundle on X とする.

定義 vector bundle E が H-stable (resp. H-semi stable) とは, ① E は H-weakly stable (resp. H-weakly semi stable) ② C を $|H|$ に含まれるすべての non-singular curve とするとき, E の C への制限が C 上 indecomposable (resp. $E = \oplus E_i$, E の Remark 分解. 各 E_i の C への制限が C 上 indecomposable).

定義 vector bundle E が H-strongly stable (resp. H-strongly semi stable) とは, C を $|H|$ に含まれるすべての non-singular curve とするとき, E の C への制限が stable (resp. semi stable).

上の定義の相互関係は, H-strongly stable $\Rightarrow$ H-stable $\Rightarrow$ H-weakly stable $\Rightarrow$ $H^{\otimes n}$-stable あるn>0. (resp. semi stable)

注1. 一般には H-weakly stable は H-stable にならない。例えば, $X = \mathbb{P}^2$, $H = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$, E を rank 2 の simple bundle on X このとき, §3 の Prop. より E は H-weakly stable ところが 任意の $C \in |H|$ は $\mathbb{P}^1$ に同型だから $E|_C$ は decomposable.

注2 H が特別な line bundle のとき, H-strongly stable と H-stable は同値。例えば, $C \in |H|$ non-singular curve が elliptic で, $d_H(E) = d$, $r(E) = r$ が $(r, d) = 1$ のとき。

X 上の vector bundle の集合 A が algebraic family を成すとは, algebraic k-scheme T, $T \times_k X$ 上 vector bundle $\mathcal{E}$ が存在して,

Aの任意の元Fに対して，次のようなTのclosed point t が存在する。$\mathcal{E}_t \simeq F$。

<u>定理</u>　Xをnon-singular projective surfaceとする。X上の$\mathcal{H}$-semi stable vector bundleで，rankとnumerically chern classを定めたもの全体は，algebraic familyをなす。

証明は，Atiyah[1]，Kleiman[3]と次のlemmaを使えばよい。

<u>lemma</u>　Eをrank r の$\mathcal{H}$-weakly semi stable vector bundleで $d_{\mathcal{H}}(E)\leq 0$ とする。そのとき，$\dim_k \Gamma(X, E) \leqq r$。

Mumfordのstableの定義に於いてquotient bundleに注目すると，曲面上のすべてのvector bundleは，適当な有限回のσ-processの後には，line bundleのextensionになる事（Schwarzenberger[8]，一般次元のXについてはHironaka[2]，Kleiman[4]）を考慮に入れれば，又stableの定義が出来るが，これは前の定義と同じ。つまり，Eが$\mathcal{H}$-weakly stableであることと，次の事は同値。Xの任意の有限回σ-process $\pi: X' \to X$と，$\pi^*(E)$の任意のnon-trivial quotient bundle E'に対して，

$$d_{\mathcal{H}}(E)/r(E) < d_{\mathcal{H}}(E')/r(E') \qquad \text{ここで } d_{\mathcal{H}}(E') = (\pi^*\mathcal{H}, \mathrm{Inr}(E'))。$$

§3．曲面上rank 2のvector bundle

曲面上のすべてのvector bundle Eは，extension $0 \to E' \to E \to F \to 0$ で得られることが知られている。ここでFはrank 2のvector bundle，

この事から曲面上の vector bundle の分類に於いて，rank 2 の vector bundle が重要である。以下 rank 2 の vector bundle のみ考える。$N(E) = c_1^2(E) - 4c_2(E)$ とおくと，任意の line bundle L に対して $N(E \otimes L) = N(E)$ が成り立つ。この $N(E)$ は次の様な意味をもつ。L を E の quotient line bundle とすると，自然な projection $p : P(E) \to X$ に対して L は section s を定義する。$s(X) = Y$ とおくと，$(Y^2)_{P(E)} = N(E)$ である。この事より，p の section の image の self-intersection number は，section のとり方に依存しないことがわかる。次の事が成り立つ。

<u>Prop</u>　rank$(E) = 2$，$N(E) > 0$ のとき，weakly stable bundle の定義は，very ample line bundle H のとり方によらない。（更に X が abelian surface のときは，$N(E) = 0$ の場合も成り立つ）。

<u>Prop</u>　$X = \mathbb{P}^2$，rank$(E) = 2$ のとき，weakly stable と simple は同値。（そのとき $N(E) < 0$）。

この事より，$X = \mathbb{P}^2$ 上に stable bundle が多く存在する事がわかる。

文　献

[1] Atiyah, M. F., Vector bundles over an elliptic curve, Proc. London Math. Soc. (3) 7 (1957) 414–452

[2] Hironaka, H., Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, I, II, Annals of Math. vol. 79 (1964) 109–326

[3] Kleiman, S., Les theoremes de finitude pour le foncteur de Picard, SGA 6 exposé 13

[4] Kleiman, S., Geometry on Grassmannians and applications to splitting bundles and smoothing cycles, Publ. Math. I.H.E.S. no.36 p281–297

[5] Mumford, D., Projective invariants of projective structures and applications, Proc. Inter. Congress Math. Stockholm (1962) 526–530

[6] Mumford, D., Geometric invariant theory Springer-Verlag 1965

[7] Narasimhan, M.S. and C.S. Seshadri., Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface, Ann. of Math vol.86 (1965) 540–567

[8] Schwarzenberger, R.L.E., Vector bundles on algebraic surfaces, Proc. London Math. Soc. (3) 11 (1961) 601–622