数理解析研究所講究録
第117巻 1971年 63-77

R^2上のflowに関して 不変測度の存在について

神戸大 理学部 江川治朗

§1. 序

力学系の不変測度については、いろいろ議論されてきた。特に相空間がコンパクト距離空間の場合には常に有限な不変Borel測度が存在することが知られている。(Kryloff, Bogoluiboff, [3])。

測度の議論において，任意の開集合の測度が正で，コンパクト集合の測度が有限であるような測度を考えるのが自然である。この点を考えると，Kryloff と Bogoluiboff の結果は§4で示すように，一般にこの要求を満たしていない。前記の不変測度の存在するための条件を求めることがこゝでの目標である。相空間が一般であると不明な点が多いので，R^2上の特殊なflowについてのみ議論する。最初一般論からはじめ，

今まで知られていることがらの概略を述べる。次にその一般論を応用して，R^2 上の孤立特異点の近傍での不変測度の存在するための条件を求める。

§２で局所力学系の定義及び基本概念を説明し，§３で測度の概念を導入する。§４で今まで知られていることがらの概略を述べる。§５で同型写像を定義し，§６で孤立特異点の近傍での不変測度の存在するための条件を求める。

§２．　局所力学系

R^n における自律系

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \cdots\cdots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

の解曲線の理論の抽象化の方向で，一般の位相空間を相空間とする力学系あるいは局所力学系の概念が導入されたことは周知の事実である。

定義２－１．（X，$\mathfrak{D}$，π）が次の条件 LD(1)～LD(3) を満たすとき，（X，$\mathfrak{D}$，π）を局所力学系であるという。又単に π は（X 上の）局所力学系であるという。

LD(1)　　X は位相空間（相空間という）。

LD(2)　$\mathcal{D}$ は次の形をした $X \times R$ の開集合。

$$\mathcal{D} = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times I_x ,$$

たゞし，$I_x = (a_x , b_x)$ は 0 を含む開区間。R は実数の集合である。

LD(3)　$\pi : \mathcal{D} \to X$ は連続写像で，

(i)　$\pi(x, 0) = x \qquad x \in X$

(ii)　$(x, t_1) \in \mathcal{D}$，$(x, t_1 + t_2) \in \mathcal{D}$，$(\pi(x, t_1), t_2) \in \mathcal{D}$

$\Rightarrow \quad \pi(\pi(x, t_1), t_2) = \pi(x, t_1 + t_2)$.

(iii)　$b_x < \infty$ ($a_x > -\infty$) ならば，$\pi(x, t)$ の $t \uparrow b_x$ ($t \downarrow a_x$) のときの cluster set は空である。

すべての $x \in X$ に対して，$I_x = R$ のとき π を特に力学系であるという。

局所力学系の局所的な性質を考察するため次の定義を導入する。

定義 2-2.　$(X, \mathcal{D}, \pi)$ を局所力学系とし，$M \subset X$ とする。

$$\mathcal{D}' = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times I'_x$$

たゞし，I_x' は $\{t \mid \pi(x,t)\in M,\ t\in I_x,\ x\in M\}$ の 0 を含む連結成分。$\pi|\mathfrak{D}'$ を $\pi\|M$ とかくとき $(M,\mathfrak{D}',\pi\|M)$ が局所力学系を定めるとき，$\pi\|M$ を π の M への制限という。

M が開集合のとき，$\pi\|M$ は局所力学系を定めることは容易に証明される（[7]）。

定義 2－3．π を X 上の局所力学系とする。このとき次の条件 (1), (2) を満たすとき，π を局所平行流であるという。

(1) $$X=\bigcup_{s\in S}\{s\}\times J_s,$$

たゞし，S はある位相空間，$J_s=(m_s,n_s)$ は 0 を含む開区間。

(2) $t_1\in J_s,\ t_1+t_2\in J_s$

$$\Rightarrow\quad \pi((s,t_1),t_2)=(s,t_1+t_2)。$$

$C(x)=\{y \mid \pi(x,t)=y,\ {}^{\exists}t\in I_x\}$ を x を通る軌道という。$C(x)=\{x\}$ のとき x を特異点という。$x_0\in X$ を特異点とする。x_0 以外に特異点を含まないような x_0

の近傍が存在するとき，x_0 を孤立特異点という。すべての $t \in I_x$ に対して $T > 0$ が存在して，$\pi(x, t+T) = \pi(x, t)$ となるとき x を周期点，T を周期という。最小の周期 $T > 0$ が存在するとき，Tを基本周期という。$L^+(x)$，$J^+(x)$ を x の limit set，positively prolongational limit set とする（[7]）。$x \in L^+(x)$ のとき x を Poisson stable，$x \notin J^+(x)$ のとき，x を wandering point という。すべての点 $x \in X$ に対して，$J^+(x) = \phi$ のとき dispersive flow であるという。

§3. 不変測度

X を R^n とし，π を自律系の定める力学系とする。任意の $D \subset X$，$t \in R$ に対して，

$$\int \cdots \int_D M(x_1, \cdots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = \int \cdots \int_{\pi(D, t)} M(x_1, \cdots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

を満たす可測関数 M が存在するとき，π は積分不変式を持つといわれる（ H. Poincaré，[3] ）。この M を使い，

$$\mu(D) = \int \cdots \int_D M(x_1, \cdots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

とおくと，μ は R^n の測度を定め，

$$\mu(D)=\mu(\pi(D,t))$$

が成り立つ。こゝで M として コンパクト集合上で有界で，ほとんどすべての点で正であるような関数のみを考えるのが自然である。局所力学系が与えられたとき，このような M の存在するための条件を求めることがこゝでの目標であるが，抽象化して考えた方が考え易いため上の議論を抽象化する。

X を距離空間とし，μ を 2^X から $[0\ \infty]$ への集合関数とする。ρ を X の距離関数とする。

定義3－1. μ が次の M(1) ～ M(6) を満たすとき，μ を X 上の測度という。

M(1)　$A=\phi \Rightarrow \mu(A)=0$

M(2)　$A\subset B \Rightarrow \mu(A)\leqq\mu(B)$

M(3)　$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$

M(4)　$\rho(A,B)>0 \Rightarrow \mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$

M(5)　$\mu(A)=\inf\{\mu(G)\ ;\ G\supset A,\ G$ は開集合$\}$.

M(6)　(i)　G が空でない開集合 $\Rightarrow \mu(G)>0$

　　(ii)　A がコンパクト $\Rightarrow \mu(A)<\infty$

上の定義において M(1) ～ M(4) を満たすとき，μ を Caratheodory の測度，M(1) ～ M(5) を満たすとき，Borel

測度ということにする。次に不変測度の概念を導入する。

Xを距離空間，μを X 上の測度，π を X 上の局所力学系とする。

定義3－2. 任意の $D \subset X$, $t \in (\sup_{x \in D} a_x, \inf_{x \in D} b_x)$ に対して，

$$\mu(D) = \mu(\pi(D, t))$$

が成り立つとき，μ を π の不変測度であるという。

§4. 距離空間上の不変測度について

不変測度について知られていることの概略を述べる。Xを距離空間，π を X 上の力学系とする。$\mu(X) = 1$ を満たす X 上の測度 μ を正規測度ということにする。X がコンパクトのとき，次の定理4-1, 4-2 が知られている。

定理 4－1. μ を正規不変Borel測度とする。$S \subset X$ を Poisson stable な点の集合とする。このとき $\mu(S) = 1$ である。（[3]）

定理4－2．（Krylott, Bogoliuboff）　正規不変Borel測度が存在する。（〔3〕）

定理4－1，4－2の証明は省略するが，特に定理4－2で存在が保証されたBorel測度 μ は一般に次の形をしている。$x \in X$，$A \subset X$ に対して，

$$m_x(A) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

とおくと，m_x は X 上のBorel測度である。$G \subset X$ を任意の開集合とするとき，μ は

$$⊛ \quad \mu(G) = \int_R \varphi_G(y)\,\mu(dy)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\tau_n}\int_0^{\tau_n} \varphi_G(\pi(x,t))\,dt$$

とかける。たゞし，φ_G は G の特性関数，$\{\tau_n\}$ は $n\to\infty$ のとき，$\tau_n \to \infty$ になるようなある数列である。この形からたゞちに x が特異点であるならば，$\mu = m_x$ が導かれる。このことより，さきに注意したように定理4-2で保証された測度は一般に M(6) を満たさない。又容易にわかるように，μ が ⊛ の形をした測度で M(6) を満たすならば，$\pi(x,t)$ は X で dense である。しかしながら

逆に dense な軌道があれば，M(6) を満たす測度が存在するであろうかという問題が起るが，これは一般に未解決の問題である。これに関して Oxtoby はトーラス上の Stepanoff flow について不変測度が存在するような微分方程式の例を示した（〔4〕）。

X がコンパクトでないとき，少し様子が変り次の定理 4－3，4－4がある。

定理4－3．(Hope)　X が局所コンパクトのとき，不変 Borel 測度が存在すれば，ほとんどすべての点が Poisson stable か departing である（〔3〕）。

こゝで $x \in X$ が departing であるとは，$L^+(x)=\phi$ かつ $L^-(x)=\phi$ であることである。

定理4－4．(J.C.Oxtoby，S.M.Ulam)　X を完備かつ可分な距離空間とする．このとき正規不変 Borel 測度が存在するための条件は，

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \varphi_K(\pi(x,t))\,dt > 0$$

を満たすコンパクト集合 $K \subset X$ と $x \in X$ が存在するこ

とである（[5]）。

departing な点に関しては定理4−2の方法は使えないので，相空間がコンパクトでないとき，すなわちこれより考察しようと思う R^2 上の流れに対しては，新しい方法を考える必要がある。

§5. 同型写像と測度の関係

π，ρ を X，Y 上の局所力学系とする。このとき π から ρ への同型写像を次のように定義する（[7]）。

定義5−1. $\chi=(h,\varphi)$ が次の条件(1),(2)を満足するとき，χ を π から ρ へ同型写像であるという。

(1) h は X から Y への位相同型写像

(2) φ は $X\times R$ から R への連続写像で，

(i) 任意の $(x,t)\in R$ に対して $\varphi(x,t)=c\cdot t$（c は 0 でない定数）.

(ii) 両辺が定義されている限り，

$$h(\pi(x,t))=\rho(h(x),\varphi(x,t)).$$

π から ρ への同型写像 $\chi=(h,\varphi)$ が与えら，μ_X を π の不変測度とする。このとき任意の $B\subset Y$ に対して，

$$\mu_Y(B)=\mu_X(h^{-1}(B))$$

とおくと，μ_Y は ρ に関する不変測度であることが容易に証明される。R^2 上の平行流に関しては，Lebesque－測度は不変測度である。又 R^2 上の dispersive flow は R^2 上の平行流に同型写像で写ることが証明できるから（[1]），上の議論と考え合せると次の定理を得る。

定理 5－2． π を R^2 上の dispersive flow とするとき，π は不変測度を持つ。

§6． R^2 における孤立特異点の近傍での不変測度の存在

π を R^2 上の局所力学系とする。$x_0\in R^2$ を孤立特異点とする。

定義 6－1． x_0 の近傍 U が存在して，$\pi\|U$ が不変測度を持つとき，π は x_0 の近傍で不変測度を持つという。

x_0 の近傍で不変測度が存在するならば，center か saddle であることは知られている（[6]）。こゝで，$U-\{x_0\}$ が周期点ばかりであるような x_0 の近傍 U が存在するとき center という。又 $L^+(x)=\{x_0\}$ 又は $L^-(x)=\{x_0\}$ であるような軌道が有限個であるとき saddle であるという。逆に x_0 が center か saddle のとき，x_0 の近傍で不変測度が存在することが証明できる。これよりその概略を述べる。

(1) center

$U-\{x_0\}$ の任意の点が $\pi\|U$ の周期点であるような x_0 の開近傍 U をとる。$S\subset U-\{x_0\}$ で任意の $x\in U-\{x_0\}$ に対して $C(x)\cap S$ が一点よりなるような $(0,1)\subset R$ に位相同型な S が存在する（[2]）。$s\in S$ に対して $T(s)$ を基本周期とすると $T(s)$ は S 上の連続関数である（[2]）。

$$Y=\bigcup_{s\in(0,1)}\{s\}\times[0,T(s))$$

と置き，Y 上の flow ρ を $(s,t_1)\in Y$，$t_2\in R$ に対して，

$$\rho((s,t_1),t_2)=(s,t') \qquad t'\equiv t_1+t_2 \mod T(s)$$
$$0\leqq t'<T(s)$$

と定めると，ρ は Y 上の力学系であり，$\pi\|U-\{x_0\}$ から ρ への同型写像が存在することが証明される。μ'_Y を R^2 上の Lebesque－測度を Y に制限したものとし，任意

の $A \subset Y$ に対して,

$$\mu_Y(A) = \int_0^1 \int_0^\infty \frac{\varphi_A(s, r)}{T(s)} dr\, ds$$

とおくと, μ_Y は Y 上の有限な不変測度である。したがって §5 で述べたように $\pi \| U - \{x_0\}$ は不変測度 μ' を持つ。これより次の定理を得る。

定理 6-2. x_0 が center であるとする。このとき, x_0 の近傍で π は不変測度を持つ。

証明. $A \subset U$ に対して, $\mu(A) = \mu'(A - \{x_0\})$ とおけば求めるものである。

(2) saddle

$M = \{ C(x) \mid L^+(x) = \{x_0\} \text{ or } L^-(x) = \{x_0\} \}$ とおく。saddle の定義より, 任意の $x \in U-M$ に対して $\pi \| U-M$ が dispersive flow で $(a_x', b_x') \subset (-\infty\ \infty)$ かつ $U-M = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ であるような x_0 の開近傍 U が存在する。ここで, G_i は $U-M$ の連結成分, (a_x', b_x') は $\pi \| U-M$ の x における定義域である。各 G_i に対して, $\pi \| G_i$ は dispersive flow であるから,

$$Y_i = \bigcup_{s \in (0,1)} \{s\} \times (a_s', b_s')$$

上の平行流の上への同型写像が存在する（[1]）。center の時と同様 Y_i を R^2 の部分集合と考え，$A \subset Y_i$ に対し，

$$\mu_{Y_i}(A) = \int_0^1 \int_0^\infty \frac{\varphi_A(s, r)}{b_s' - a_s'}\, dr\, ds$$

とおく。$b_s' - a_s'$ は s に関して下に半連続な関数であり（[8]），$0 < b_s' - a_s' < \infty$ であるから，μ_{Y_i} は定義され μ_{Y_i} は Y_i 上の有限な不変測度である。μ_{G_i}' を G_i 上の不変測度とすると次の定理を得る。

定理 6－3． x_0 が saddle であれば，x_0 の近傍で不変測度が存在する。

証明． $B \subset U$ に対して，

$$\mu(B) = \sum_{i=1}^{n} \mu_{G_i}'(B \cap G_i)$$

とおくと求めるものである。

以上 (1)，(2) より次の定理を得る。

定理 6－4． x_0 の近傍で不変測度が存在するための条件は x_0 が center か saddle である。

REFERENCES

[1] J.Egawa, Global Parallelizability of Local Dynamical Systems (to appear).

[2] Roger C.McCann, A Classification of Centers, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 30 (1969), 733 - 746.

[3] V.V.Nemytskii and V.V.Stepanov, Qualitative Theory of Differential Equations, Princeton University Press, 1960.

[4] John C.Oxtoby, Stepanoff Flows on the Torus, Proceedings of the American Mathematical Society Vol.4 (1953), 982 - 987.

[5] J.C.Oxtoly and S.M.Ulam, On the Existence of a Measure Invariant under a Transformation, Ann. of Mathematics, Vol 40, NO.3 (1939), 560 - 566.

[6] T.Ura et Y.Hirasawa, Sur les Points Singuliers des Équations Differentielles Admettant un Invariant Intégral, Proceedings of the Japan Academy Vol. 30 (1954), No.8, 726 - 730.

[7] T.Ura, Isomorphism and Local Characterization of Local Dynamical Systems, Funkcialaj Ekvacioj, 12 (1969), 99 - 122.