数理解析研究所講究録
第 118 巻 1971 年 40-48

特異摂動について

京大理　　池部晃生

本稿はヒルベルト空間における自己共役作用素のいわゆる特異摂動の理論に関する J. Glimm と A. Jaffe の仕事

J. Glimm & A. Jaffe : Singular Perturbations of Selfadjoint Operators. Comm Pure Appl. Math. 22 (1969), 401–414

の紹介である．詳しくは上記の論文を参照していただくとして，証明などは一切省略することにしたい．ただ蛇足とも思える言葉の説明と内容の解説を試みる．

ヒルベルト空間の基礎知識は仮定するが，念の為，有界作用素の定義から始める．線型作用素 T が有界であるとは，定義域 $\mathscr{D}(T)$ に属する φ に対して

$$\|T\varphi\| \leq M\|\varphi\|$$

なる φ によらない定数 M が存在することである．$\|\ \|$ はヒルベルト空間等のノルムを表わす．序ながら等の内積は $(\ ,\ )$ で示す．上の不等式を成立せしめるような最小の M —— M の

下限 ── をTの限界またはノルムといい $\|T\|$ で表わす. 以後有界作用素というときは定義域が $\mathfrak{H}$ になるものだけを考える. しかし応用上現われる作用素は有界作用素だけではない.

非有界作用素で重要なのはその定義域が $\mathfrak{H}$ で稠密なものである. 即ち $\mathfrak{D}(T)^a = \mathfrak{H}$ なる T である (^{a} は閉包を表わす). このような T に対してはその共役作用素 T^* が次のように定義される.

$$\mathfrak{D} = \{\psi : \ (T\varphi, \psi) = (\varphi, \psi^*) \ \ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(T), \ \exists \psi^*\}$$

とする. $\mathfrak{D}(T^*) = \mathfrak{D}$, $\varphi \in \mathfrak{D}(T)$ に対して $T^*\varphi = \varphi^*$ と定義する. φ^* が φ によつて一意的に決定されることは $\mathfrak{D}(T)^a = \mathfrak{H}$ から出る. T^* は線型作用素であるのみならず, 閉作用素となつている. 線型作用素 A が閉であるとは, 点列 $\{x_n\} \subset \mathfrak{D}(A)$ および $\{Ax_n\}$ が Cauchy 列 ($x_n \to x$, $Ax_n \to y$) であるならば, $x \in \mathfrak{D}(A)$, かつ $Ax = y$ となることである. このことは, A のグラフ $\mathfrak{G}(A) \subset \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ を $\{[\varphi, A\varphi] \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} : \varphi \in \mathfrak{D}(A)\}$ で定義すれば, $\mathfrak{G}(A)$ が $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ で閉じていることと同値である.

B が A の拡張 (A が B の縮小) であるとは, $\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{D}(B)$ かつ $\varphi \in \mathfrak{D}(A)$ に対しては $A\varphi = B\varphi$ なることと定義し, $A \subset B$ と書く. $\mathfrak{D}(T)^a = \mathfrak{H}$ なる T が $T \subset T^*$ なるとき, T を対称作用素といい, 特に $T = T^*$ となるとき, 自己共役作用

素という.

ここで問題にするのは自己共役作用素の摂動, 即ち"非摂動"自己共役作用素Aに"摂動項"B——これも自己共役とする——が加わったもの $A+B$ ($\mathcal{D}(A+B)=\mathcal{D}(A)\cap\mathcal{D}(B)$) であるが, 特異摂動というからには, それに対すべき"正則"摂動が考えられて然るべきであろう. 正則摂動とは

$$\|B\varphi\| \leq a\|\varphi\| + b\|A\varphi\| , \quad \varphi \in \mathcal{D}(A)$$

のように, 作用素Bが作用素Aによつて何らかの意味で押えられている場合をいう. 正則摂動については

T. Kato: Perturbation Theory for Linear Operators,
Springer-Verlag, Berlin 1966

に詳しく論ぜられている. 上の範疇に属さないのが特異摂動ということになる.

正則摂動の理論は非相対論的量子力学の範囲内では大きな成功を収めた. しかし場の理論(のモデル)を扱うのには必ずしも適当ではない. その為に特異摂動を扱う必要が出て来たのであろう. だが本稿では物理への応用には触れない.

問題は, 粗くいえば, 正則でない摂動に対して $A+B$ が自己共役になる為の十分条件を与えることである.

先ず作用素列の収束について考える. 有界作用素列 T_n が有界作用素Tに強収束するとは, すべての $\varphi\in\mathcal{H}$ に対して

$T_n\varphi \to T\varphi$, $n\to\infty$（詳しくいえば $\|T_n\varphi - T\varphi\| \to 0$）が成立つ場合をいう．この他にも普通考えられる作用素列の収束としては，一様収束，弱収束などがあるが，非有界作用素の摂動を論ずるには更に別種の収束を考える必要がある．上記のKatoの本にはリゾルベント収束（R－収束）が定義されている．作用素Tのリゾルベントとは，複素数 z に対して，$T-z$ の有界な逆作用素が存在するとき（全空間で定義された逆），その逆作用素 $(T-z)^{-1}$ のことをいう．稠密に定義された作用素 C_n の列が C_∞ に R－収束する：$C_n \xrightarrow[R]{} C_\infty$ とは，C_n のリゾルベント $R_n(z) = (C_n - z)^{-1}$ がある z に対して存在して n に関して一様有界：$^{\exists}M : \|R_n(z)\| \leq M$ であって，$R_n(z)$ が稠密に定義された逆を持つ作用素 $R(z)$ に強収束することをいう．Glimm-Jaffe はある意味でこれより弱い収束概念を与えている．それがグラフ収束（G－収束）である．前と同様に，C_n を稠密に定義された作用素列としよう．更に $\mathcal{G}_\infty \subset \mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ を次のように定義する：

$$\mathcal{G}_\infty = \{[\varphi, \chi] \subset \mathfrak{H}\times\mathfrak{H} : \varphi_n \to \varphi \ {}^{\exists}\varphi_n \in \mathcal{D}(C_n),\ C_n\varphi_n \to \chi\}.$$

この $\mathcal{G}_\infty$ は一般にはある作用素のグラフとはならないが，特に $\mathcal{G}_\infty$ が稠密に定義されたある作用素 C_∞ のグラフ $\mathcal{G}(C_\infty)$ になるときに，C_n は C_∞ に G－収束する：$C_n \xrightarrow[G]{} C_\infty$ という．自己共役作用素列 C_n の場合には $C_n \xrightarrow[R]{} C_\infty$ より $C_n \xrightarrow[G]{} C_\infty$

が従がう．この意味で G-収束の方が弱いのであるが，逆に $C_n \underset{G}{\to} C_\infty$ であって，かつ C_∞ が極大対称作用素となるときには，$C_n \underset{R}{\to} C_\infty$ が出る．ここで C_∞ が極大対称であるというのは，$C_\infty \subsetneqq C$ なる対称作用素 C が存在しないことである．

次に，C_n の G-収束が R-収束を与え，かつ極限作用素が極大対称または自己共役になる為の十分条件について考えよう．$N \geqq 1$，即ちすべての $\varphi \in \mathcal{D}(N)$ に対して $(N\varphi, \varphi) \geqq (\varphi, \varphi)$ であるような自己共役作用素を一つ固定する．実数 λ に対して新しい内積 $(\ ,\ )_\lambda$ を次のように定義する：

$$(\varphi, \psi)_\lambda = (N^{\frac{\lambda}{2}}\varphi, N^{\frac{\lambda}{2}}\psi).$$

$\lambda > 0$ の場合には $\mathcal{D}(N^{\frac{\lambda}{2}})$ が上記の内積を持ったヒルベルト空間であるとしてこれを $\mathfrak{H}_\lambda$，$\lambda < 0$ の場合には $\mathfrak{H}$ を内積 $(\ ,\ )_\lambda$ で完備化して得られるヒルベルト空間を $\mathfrak{H}_\lambda$，$\lambda = 0$ の場合には $\mathfrak{H}$ 自身を $\mathfrak{H}_\lambda$ として $\mathfrak{H}_\lambda$ を定義すれば，$\lambda \geqq 0$ に対して $\mathfrak{H}_\lambda \subset \mathfrak{H}_0 \subset \mathfrak{H}_{-\lambda}$ なる関係が得られるが，更に D を $\mathfrak{H}_\alpha$ から $\mathfrak{H}_\beta$ への（稠密に定義された）有界作用素とすれば，この作用素の限界 $\|D\|_{\alpha\beta}$，即ち $\|D_{\alpha\beta}\| = \inf\{M : \|D\varphi\|_\beta \leqq M\|\varphi\|_\alpha \ \forall\varphi \in \mathcal{D}(D)\}$（但し $\|\ \|_\lambda = \sqrt{(\ ,\ )_\lambda}$）は

$$\|D\|_{\alpha\beta} = \|N^{\frac{\beta}{2}} D N^{-\frac{\alpha}{2}}\|$$

となる．C_n を自己共役として次の条件を考えよう．

(1) ある実数 λ に対して $C_n - C_m$ が $\mathfrak{H}_\lambda$ から $\mathfrak{H}_{-\lambda}$ への稠

密に定義された有界作用素であつて，$n, m \to \infty$ のとき

$$\| C_n - C_m \|_{\lambda, -\lambda} \to 0.$$

(2)　ある μ と，$z = x + iy$ の非有界集合で扇形領域 $|x| \leq \text{const.} |y|$ に入るものに対して，n によらない $M(z)$ があつて

$$\| R_n(z) \|_{\mu, \lambda} \leq M(z) \quad (R_n(z) = (C_n - z)^{-1}).$$

(3)　上に述べた z に対して

$$\| R_n(\bar{z}) \|_{\mu, \lambda} \leq M(z).$$

定理 1.　C_n を共通の定義域を持つた自己共役作用素として，$C_n \underset{G}{\to} C$ を仮定する．（$\mathcal{D}(C)$ は $\mathcal{D}(C_n)$ と一致するとは限らない．）　条件 (1)，(2) が成立つならば，$C_n \underset{R}{\to} C$ であり，かつ C は極大対称である．更に条件 (3) も成立てば，C は自己共役となる．

上記の定理は自己共役作用素列に関するものであるが，実はこれを用いることによつて $A+B$ の自己共役性を保証する定理を得ることができる．定理を述べるために二三の記号と定義を与えよう．C を非負定値：$C \geq 0$：$(C\varphi, \varphi) \geq 0$, $\varphi \in \mathcal{D}(C)$ なる対称作用素とする．このとき $\Phi(\varphi, \psi) = (C\varphi, \psi)$, $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(C)$ によつて双一次形式 Φ が得られるが，この Φ はある双一次形式に一意的に拡張される．それを $\tilde{\Phi}$ と書くことにすると

，$\tilde{\Phi}$の定義域$\mathcal{D}(\tilde{\Phi})$に$\varphi$が属しているとは，次の条件を満す点列$\varphi_n \in \mathcal{D}(\Phi)$が存在することである．$\varphi$は$\varphi_n$の$\mathfrak{H}$における強極限であり，かつ$\Phi(\varphi_n-\varphi_m, \varphi_n-\varphi_m) \to 0$ $(n, m \to \infty)$．$\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\tilde{\Phi})$，$\varphi_n, \psi_n$を対応する点列とすれば，$\tilde{\Phi}(\varphi, \psi)$は$\lim_{n\to\infty} \Phi(\varphi_n, \psi_n)$で定義される．（実は$\mathcal{D}(\tilde{\Phi})$は，~~$\Phi$の~~ Cのフリードリックス拡張を$\tilde{C}$とすれば，$\mathcal{D}(\tilde{C}^{\frac{1}{2}})$になっている．）　この$\tilde{\Phi}$を$C\,(\geqq 0)$の決める双一次形式と呼ぶことにしよう．

交換子$[C, D]$は通常の如く$[C, D] = CD - DC$と形式的に定義される．

$\mathcal{D} \subset \mathfrak{H}$が$C(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$，$\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(D)$なる性質を持っているとする．$C$，$D$が対称作用素であれば，$[C, [C, D]]$は形式的に対称であることはすぐにわかるが，形式的に成立つ式

$$([C, [C, D]]\varphi, \psi) = (D\varphi, C^2\psi) - 2(DC\varphi, C\psi) + (C^2\varphi, D\psi)$$

の右辺によつて，$\mathcal{D}(\Phi) = \mathcal{D}$なる対称双一次形式$\Phi$を定義することができる（$\Phi$が対称とは$\Phi(\varphi, \psi) = \overline{\Phi(\psi, \varphi)}$，$\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Phi)$となること）．

もう一つ作用素の芯という概念を定義しておこう．作用素Tの最小の閉拡張を（もし存在すれば）Tの閉包という．閉作用素Cの芯$\mathcal{D}$とは，Cを$\mathcal{D}$に制限して得られる作用素$C|_{\mathcal{D}}$の閉包がCに一致するようなもののことである．

以上の準備の下に Glimm-Jaffe の主要定理を次の形に述べることができる.

定理 2. Nを前述のものとする. 自己共役作用素Aについて $N \leq A$[1] および $[N, A] = 0$[2] を仮定する.

$$\mathcal{D} = \bigcap_n \mathcal{D}(A^n)$$

とおこう. $\mathcal{D}$は自己共役作用素Bの芯であるとする. $\mathcal{D}$上で定義される双一次形式として

$$0 \leq aN + B + \mathrm{const}, \qquad 0 \leq a < \frac{1}{2},$$

$$0 \leq \varepsilon A^2 + \mathrm{const}\, B + [A^{\frac{1}{2}}, [A^{\frac{1}{2}}, B]] + \mathrm{const}, \quad 2a + \varepsilon < 1$$

(即ち右辺で決る双一次形式 Φ が $\Phi(\varphi, \varphi) \geq 0$ なること)を満すものとする. 更に B はある定数 α, β, ν ($\beta > 0$) に対して, $\mathfrak{H}_\nu$ から $\mathfrak{H}_{-\nu}$ への, また $\mathfrak{H}_\alpha$ から $\mathfrak{H}_\beta$ への有界作用素であるとする. また $\nu \geq 2$ の場合には, $\mathcal{D}$上で定義された

---

1) $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(N)$ であつて, $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ に対して $(N\varphi, \varphi) \leq (A\varphi, \varphi)$ が成立つこと.

2) 精確にいえば, E_λ, F_λ $(-\infty < \lambda < \infty)$ をそれぞれ A, N に属する単位の分解とするとき, $E_\lambda F_\mu - F_\mu E_\lambda = 0$ が任意の λ, μ に対して成立つことである. E_λ, F_μ は有界作用素なので, 定義域に関する問題は起らない.

双一次形式として，すべての $\varepsilon>0$ とある $\mu>\nu-2$ に対して

$$0 \leqq N^{\mu+2} + [N^{\frac{\mu+1}{2}}[N^{\frac{\mu+1}{2}}, B]] + const$$

を仮定する．このとき結論は，$A+B$ は自己共役である．

証明は $A+B$ を“近似する”適当な列を作り定理1を適用することによって得られる．定理の条件中に出て来る双一次形式としての不等式がどのように使われるかは興味のある所であろうが—実はあるリゾルベントの評価に使われる—ここでは述べない．条件は二重交換子などを含んでいて複雑のようであるが，実際の検証にはそれ程の困難を与えることはないであろう．また最初の方で述べた正則摂動の場合のように，BがAで押えられる必要のないことも定理の條件を見ていただけばわかるであろう。条件中のNは大体Aと同じものであると思っていただいてよい．Glimm-Jaffeはこの特異摂動を場の理論のハミルトニアンに応用したのであるが，通常の量子力学に現われる $-\Delta+V$（Vはポテンシャル函数）の形のハミルトニアンに対しても，$V(x)$ が無限遠で特異性を持っている場合に適用できる．また $\mathcal{D}(A+B)$ は一般に $\mathcal{D}(A)$ などとは一致しないことを注意しておく．