数理解析研究所講究録
第121巻 1971年 43-57

Banach空間における一階線形常微分方程式の初期値問題

東大 教養　牛島 照夫

はじめに

Banach空間 X における線形作用素 A を係数とする常微分方程式：

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

の初期値問題の研究は、吉田耕作，Hille，Phillips 等によって、充分に研究されている。しかし、これまでの理論の大部分は、A のレゾルヴェント集合 $\rho(A)$ が空でなく、かつ、ある実数 ω があって、

$$\rho(A) \supset (\omega, \infty),$$

および、$\lambda \to \infty$ のとき，

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| = O(\lambda^{-1})$$

なることを基本的な仮定として論じられてきた。（[5]，定理 23.8.4 など）ところで，次のような簡単な例を考えてみよう。

ii

$X = L^2(R^1) \times L^2(R^1) \ni f(k) = \begin{pmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \end{pmatrix}$ に対して，

$$A(k) = \begin{pmatrix} -k^2 & k^\ell \\ 0 & -k^2 \end{pmatrix}$$

から

$$D(A) = \{ f \in X,\ A(k)f(k) \in X \},$$

$$(Af)(k) \equiv A(k)\, f(k)$$

によって定まる A を考える。

k を固定して考えれば，

$$(\lambda - A(k))^{-1} = (\lambda + k^2)^{-1} E + (\lambda + k^2)^{-2} k^\ell F,$$

$$e^{tA(k)} = e^{-tk^2} E + t k^\ell e^{-tk^2} F$$

$$\left(E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

である。そこで，

$$(T_t f)(k) \equiv e^{tA(k)} f(k)$$

とおくと，$t > 0$ では，$T_t \in L(X)$ で，かつ $\{ T_t : t > 0 \}$ は，半群をなし $\{ |\arg t| < \pi/2 \}$ に解析接続できることがわかる。さらに，

$$\frac{d}{dt} T_t f = A T_t f,\quad \forall t > 0,\quad \forall f \in X\ ;$$

$$f \in D(A) \text{ なら，} T_t f \longrightarrow f \quad (t \downarrow 0)$$

である。しかるに，$\ell > 4$ ならば，$\rho(A) = \emptyset$ となってしまう。

ところで，m を整数とすると，

$$(\lambda - A(k))^{-m} = (\lambda + k^2)^{-m} E + m(\lambda + k^2)^{-m-1} k^\ell F$$

であるから，$\ell \leqq 2(m+1)$ なら，λ が非正の実数でない限り，$(\lambda - A(\tilde{h}))^{-m}$ は，X での有界作用素 $R_m(\lambda)$ に拡張される。さらに，$R_m(\lambda)$ は，たとえば $|\arg(\lambda-1)| \leqq \pi - \varepsilon$，$\varepsilon > 0$，では，解析的で有界である。

一方，適当に積分路 Γ をとると，

$$e^{tA(\tilde{h})} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{t\lambda}(\lambda - A(\tilde{h}))^{-1}\,d\lambda$$

と表わせる。したがって，部分積分によって，

$$t^m e^{tA(\tilde{h})} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^m e^{t\lambda}(\lambda - A(\tilde{h}))^{-1}\,d\lambda$$

$$= \frac{(-1)^m}{2\pi i}\int_\Gamma e^{t\lambda}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^m(\lambda - A(\tilde{h}))^{-1}\,d\lambda$$

$$= \frac{m!}{2\pi i}\int_\Gamma e^{t\lambda}(\lambda - A(\tilde{h}))^{-m-1}\,d\lambda$$

となる。そこで，

$$T_t = e^{tA} = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{(m-1)!}{t^{m-1}}\int_\Gamma e^{t\lambda}R_m(\lambda)\,d\lambda$$

としてやれば，例にのべた問題の解作用素を作れそうである。このような事情を明らかにするのが，本講の目的である。

§1. A^∞ー適切性

まず次の条件(Y)を仮定する。

$(Y) \ni A \iff$

A は閉作用素かつ，$D(A^\infty) = \bigcap_{n=0}^{\infty} D(A^n)$ は X で稠密

このとき，$D(A^\infty)$ を，セミノルム系 $\{\|x\|_n = \|A^n x\| : n = 0, 1, 2 \cdots\}$ によって，Fréchet 空間とみなすことができる。今後この

Fréchet 空間をYであらわそう。さらに

$$A_\infty = A|_Y$$

とおく。Yの位相のいれ方から，$A_\infty \in L(Y)$（YからYへの連続線形写像）である。添数∞は，Yに関係することを示すことにする。簡単のために，

$$|||x|||_n = \sum_{j=0}^{n} \|x\|_j,\ x \in Y$$

と書く。

以下，次のような適切性の条件を考える。

$(A^\infty) \ni A \iff$

$A \in (Y)$ であり，かつ，A_∞ はYにおいてクラス C_0 の半群 $T_\infty(t)$ を生成する。

$(A_e^\infty) \ni A \iff$

$A \in (Y)$ であり，かつ，ある実数ωがあって，$A_\infty - \omega$ はYで同等連続なクラス C_0 の半群を生成する。

$(A_c^\infty) \ni A \iff$

$A \in (A^\infty)$ であり，かつ，その生成する半群 $T_\infty(t)$ に対して任意の $t>0$ に対してある定数 C_t が存在して

$$\|T_\infty(t)x\| \leqq C_t\|x\|,\ \forall x \in Y$$

がなりたつ。

$A \in (A^\infty)$ のとき，その生成する半群 $T_\infty(t)$ がクラス C_0 であることは，局所同等連続であることと等しい（[6]，

命題1.1)。これは、空間Yにおいては、任意の $t>0$ に対して、ある定数 C_t と n_t が存在して、評価:

$$\|T_\infty(s)x\| \leqq C_t |||x|||_{n_t} \qquad 0 \leqq s \leqq t, \quad x \in Y$$

をみたすことと同等である。

同様に、$A_\infty - \omega$ の生成する半群が同等連続になることは、A_∞ の生成する半群 $T_\infty(t)$ に対してある $C>0$ と n が存在して

$$\|T_\infty(t)x\| \leqq C e^{\omega t} |||x|||_n, \quad 0 \leqq t < \infty, \quad x \in Y$$

がなりたつことと同等である。

さらに、

$(A_c^\infty) \ni A \Longleftrightarrow$

$A \in (A^\infty)$ であり、かつ、任意の $\varepsilon>0$ に対してある $C_\varepsilon>0$ が存在して、

$$\|T_\infty(t)x\| \leqq C_\varepsilon \|x\|, \quad \varepsilon \leqq t \leqq \varepsilon^{-1}, \quad x \in Y$$

となる。

さて、複素平面上の閉領域 Λ_L^* が、共役対数領域であるとは、正数 α と実数 β, γ が存在して、

$$\Lambda_L^* = \{\lambda = \xi + i\eta : \xi \geqq \alpha \log|\eta| + \beta, \ \xi \geqq \gamma\}$$

と書けることとしよう。このとき、(A^∞) であるための1つの充分条件として、次の定理が得られる。

<u>定理 1</u>　$A \in (Y)$ に対して $\rho(A_\infty)$ に含まれる共役対数領域 Λ_L^* が存在し、かつ、ある k と l が存在して、

$$\|(\lambda - A_\infty)^{-1}x\| \leqq C(1+|\lambda|)^{k}|||x|||_{\ell}, \quad x \in Y, \quad \lambda \in \Lambda_L^*$$

ならば $A \in (A^\infty)$ である。

(A_e^∞) に対する特徴づけは，同等連続な C_0 半群の特徴づけ（Yosida[11] 参照）から，ただちに得られるが，我々の場合には次のように変形ができる。

定理 2　$A \in (A_e^\infty) \Longleftrightarrow$

実数 ω が存在して，右半平面 $\Lambda_E = \{\mathrm{Re}\,\lambda \geqq \omega\} \subset \rho(A_\infty)$ であり，かつ，ある k と ℓ が存在して，

$$\|(\lambda - A_\infty)^{-1}x\| \leqq C(1+|\lambda|)^{k}|||x|||_{\ell}, \quad x \in Y, \quad \lambda \in \Lambda_E$$

をみたす。

さらに，大春氏と岡沢氏による次の結果（[8]）がある。

定理 3　$A \in (A_c^\infty) \Longleftrightarrow$

$A \in (A_c^\infty)$ であり，かつ次の条件 (F) をみたす：

(F)　任意の $\varepsilon > 0$ に対して，次の性質をみたす定数 C_ε が存在する。すなわち，任意の $x \in Y$ に対してある実数 $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon, x)$ が存在して，$\lambda > \lambda_0$ かつ $\varepsilon < n/\lambda < \varepsilon^{-1}$ ならば，

$$\|\lambda^n(\lambda - A_\infty)^{-n}x\| \leqq C_\varepsilon \|x\|$$

をみたす。

定理 2 の略証　条件の必要なことは，

$$(\lambda - A_\infty)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T_\infty(t)x\,dt, \quad \mathrm{Re}\,\lambda > \omega$$

がYの等式として意味をもつことからしたがう。十分性を示すためには，$\omega' > \omega$ として，

$$T_\infty(t)x = x + tA_\infty x + \frac{t^2}{2}A_\infty^2 x + \cdots + \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}A_\infty^{k+1}x +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega'-i\infty}^{\omega'+i\infty} e^{t\lambda}\lambda^{-k-2}(\lambda - A_\infty)^{-1}A_\infty^{k+2}x\,d\lambda$$

としてやればよい。

§2 n 次の逐次レゾルヴェントとクラス (A^∞, n).

$A \in (Y)$ のとき，n 次の逐次レゾルヴェント集合 $\rho_n(A)$ を次のように定める。

$\rho_n(A) = \{\lambda \in \rho(A_\infty)$;

ある $C_\lambda > 0$ が存在して，

$\| [(\lambda - A_\infty)^{-1}]^{+n} x \| \leq C_\lambda \|x\|$，$x \in Y\}$

$\lambda \in \rho_n(A)$ に対して，

$$R_n(\lambda) \equiv \overline{[(\lambda - A_\infty)^{-1}]^n} \in L(X)$$

を n 次の逐次レゾルヴェントという。さらに n 次の本質的逐次レゾルヴェント集合 $\rho_{n,e}(A)$ を，

$\rho_{n,e}(A) = \{\lambda \in \rho_n(A)$:

ある $\varepsilon > 0$ が存在して，$|\lambda - \lambda'| < \varepsilon$ なら，

$\| R_n(\lambda') \| \leq C_\lambda \}$

とおこう。

$\lambda \in \rho_n(A)$ のとき，$\lambda \in \rho(A)$ であるためには，$(\lambda - A)^n$

が閉作用素であることが必要十分である。したがって，$\rho(A) \neq \emptyset$ ならば，$\rho_n(A) = \rho(A)$ $(n=1, 2, \cdots)$ である。また，$\lambda \in \rho_n(A)$ で $R_n(\lambda) = [(\lambda - A)^{+n}]^{-1}$ ならば，$\lambda \in \rho(A)$，かつ，$R_n(\lambda) = (\lambda - A)^{-n}$ である。さらに $R_n(\lambda)$ は，閉集合 $\rho_{n,e}(A)$ 上で解析的なこともわかる。

定理 1，2 から，$\rho_n(A)$ が共役対数領域 Λ_L^*（又は，右半平面 Λ_E）を含み，Λ_L^*（又は Λ_E）上で $\|R_n(\lambda)\| \leq C(1+|\lambda|)^k$ となるならば，$A \in (A^\infty)$（又は (A_e^∞)）であることがわかる。

逆に $A \in (A^\infty)$ のとき，$R_n(\lambda)$ の存在と挙動を調べるためには，次の補題が有用である。この補題の原形は，Chazarain による（[2]，[3] 参照）

補題　*f は，その台が $(-\infty, a)$，$a < \infty$，に含まれる C^∞ 関数で，*

$$f^{(k)}(0) = 0, \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^n$$

をみたすものとする。このとき，

$$R_f(\lambda)x \equiv \int_0^\infty f(t) e^{-\lambda t} T_\infty(t) x \, dt$$

に対して

$$\Sigma = \{ \lambda : \|R_f(\lambda)x\| \leq C_\lambda \|x\|, \ \|R_{f(n+1)}(\lambda)x\| \leq 1/2 \|x\| \}$$

とおくと，

$$\Sigma \subset \rho_n(A)$$

であり．$\lambda \in \Sigma$ のとき

$$R_{n+1}(\lambda) = \overline{R_f(\lambda)}\left(1 + (-1)^{n+1}\,\overline{R_{f^{(n+1)}}(\lambda)}\right)^{-1},$$

$$\| R_{n+1}(\lambda) \| \leq 2C_\lambda$$

となる。

略証　次の等式が有有限な台をもつ C^∞-関数 f に対して成立つことに注意する。

$$(\lambda - A_\infty) R_f(\lambda)x = (\lambda - A_\infty)^{n+1} f(0)x - (\lambda - A)^n f'(0)x +$$
$$+ \cdots + (-1)^n f^{(n)}(0)x + (-1)^{n+1} R_{f^{(n+1)}}(\lambda)x$$

この補題を使うためには．$T_\infty(t)$ の原点における挙動を超関数的に制限しておくと都合がよい。そこで．

$$|\varphi|_k = \sup_{t \in R^1,\, 0 \leq j \leq k} |\varphi^{(j)}(t)|$$

として．次の条件をおく。

$(A^\infty, n) \ni A \iff$

$A \in (A^\infty)$ かつ．次の条件 (n) をみたす：

(n) ある $C > 0$ と整数 $k \geq 0$ が存在して．$\varphi \in \mathcal{D}(-1, 1)$ ならば

$$\left\| \int_0^1 \varphi(t) t^n T_\infty(t) x \, dt \right\| \leq C |\varphi|_k \|x\|, \quad x \in Y$$

がなりたつ

$(A_e^\infty, n) \iff (A^\infty, n) \wedge (A_e^\infty)$

$(A_c^\infty, n) \iff (A^\infty, n) \wedge (A_c^\infty)$

とおく。さらに (A_c^∞, n) において．条件 (n) を次の $(n)_0$ で

おきかえたものを $(A_c^\infty, n)_0$ とおく。

$(n)_0$ あるC > 0があって

$$\sup_{0<t\leq 1} \| t^n T_\infty(t) x \| \leq C \|x\|, \quad \forall x \in Y.$$

例として (A^∞, n) の特徴づけをあげよう。

定理 4　$A \in (Y)$ が (A^∞, n) に属すためには、$\rho_{n+1}(A)$ に含まれる共役対数領域 Λ_L^* が存在し、かつ、ある整数 k が存在して、$\lambda \in \Lambda_L^*$ ならば、

$$\| R_{n+1}(\lambda) \| \leq C(1+|\lambda|)^k$$

となることが必要充分である。

証明　必要性：$\varphi \in \mathcal{D}$ を台が $(0, \infty)$ の内部に含まれ、非負でかつ、$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi \, dt = 1$ をみたすものにとろう。

$$f(t) = \frac{(-t)^n}{n!} \int_t^\infty \varphi(t) \, dt$$

とおくと、補題の条件をみたしている。補題の $\sum$ が共役対数領域を含むことと、$R_{n+1}(\lambda)$ の評価は、条件 (A^∞, n) からしたがう。

充分性：Γ_L^* を Λ^* の境界として、

$$S_n(\varphi)x \equiv \int_{\Gamma_L^*} \hat{\varphi}(\lambda) R_{n+1}(\lambda) x \, d\lambda, \quad \varphi \in \mathcal{D}, \quad x \in X$$

とおく。ただし、$\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{t\lambda} dt$ である。このとき、S_n は $L(X)$ に値をとる distribution であることが条件からしたがう。より一段の解析の後で、$x \in Y$ ならば、

$$S_n(\varphi)x = \int_0^\infty \varphi(t) \frac{t^n}{n!} T_\infty(t) x \, dt$$

となる。証明終り。

なお，(A_e^∞, n) の特徴づけは，定理 4 において Λ_L^* を右半平面 Λ_E におきかえたものである。

Da Prato [4] の結果から，$(A_c^\infty, n)_0$ の特徴づけを導くことができるが，省略する。

さらに，$\rho(A) \neq \emptyset$ のときは，条件 (A^∞) は，非斉次方程式 $\left(\frac{d}{dt} - A\right)u = f$ の適切性に関するある条件と同値である。この条件 $(\mathcal{D})$ をのべるために，記号を準備する。X に値をとる distribution で $[0, \infty)$ に台をもつものの全体を $\mathcal{D}'_+(X)$ とおく。

$(\mathcal{D}) \ni A \iff$

A は閉作用素で，任意の $f \in \mathcal{D}'_+(X)$ に対して，次の条件 (T. 1) 〜 (T. 3) をみたす $u \in \mathcal{D}'_+(X)$ が一意的に存在する。

(T. 1) $u(\varphi) \in D(A), \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}$

(T. 2) $\left(\frac{d}{dt} - A\right)u(\varphi) = f(\varphi), \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}$

(T. 3) 写像 $f \to u$ は，$\mathcal{D}'_+(X)$ から $\mathcal{D}'_+(X)$ への連続写像である。

このとき，次の結果がある。

定理 5 次の三条件は同等：

1° $A \in (A^\infty), \ \rho(A) \neq \emptyset$;

2° $A \in (\mathcal{D})$, $\overline{D(A)} = X$;

3° $\overline{D(A)} = X$ かつある共役対数領域 Λ_L^* と $C > 0$, $k \geq 0$ が存在して，$\lambda \in \Lambda_L^*$ なら $(\lambda - A)$ は，次の評価をみたす有界な逆をもつ：

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq C(1 + |\lambda|)^k.$$

この定理は，Lions の定義した正則な超関数的半群 [7] の生成作用素の特徴づけを与えている（[2]，[9]）。

§3. 解の滑らかさ

クラス (A_c^∞, n) に滑らかさの条件を附けると，$R_{n+1}(\lambda)$ の存在領域と挙動によって，特徴づけることができる・例として，微分可能（したがって C^∞）なクラス (A_c^∞, n, L) と，複素解析的なクラス (A_c^∞, n, H) についてのべる。

$(A_c^\infty, n, L) \ni A \iff$

$A \in (A_c^\infty, n)$ であり，$T(t) = \overline{T_\infty(t)}$ は $t > 0$ で微分可能。

$(A_c^\infty, n, H) \ni A \iff$

$A \in (A_c^\infty)$ であり，ある θ_0 とある $L(X)$ 値関数 $T(z)$ で，$\Sigma_{\theta_0} = \{|\arg z| < \theta_0\}$ では解析的かつ $\overline{\Sigma_{\theta_0}} - \{0\}$ では連続なものが存在し，次の条件 (H.1)〜(H.3) をみたす：

(H.1) $T(t) = \overline{T_\infty(t)}$, $t > 0$;

(H.2) $|\theta| \leqq \theta_0$ のとき $T(te^{i\theta})$ は条件(n)をみたす;

(H.3) あるkが存在して $\|T(z)X\| \leqq C |||X|||_k$, $0<|z|\leqq 1$,

$|\arg z| \leqq \theta_0$, $x \in Y$.

定理 6　$A \in (Y)$のとき，(A_c^∞, n, L)であるためには，ある$k \geqq 0$が存在して，任意の$\varepsilon > 0$に対して$\rho_{n+1}(A)$に含まれるある対数領域$\Lambda_L^\varepsilon = \{\lambda = \xi + i\eta : \varepsilon\xi \geqq -\log|\eta| + \delta$ または $\xi \geqq \gamma\}$, $(\delta = \delta_\varepsilon, \gamma = \gamma_\varepsilon)$が存在し，$\lambda \in \Lambda_L^\varepsilon$ならば

$$\|R_{n+1}(\lambda)\| \leqq C_\varepsilon (1+|\lambda|)^k,$$

となることが必要充分である。

証明　必要性は，補題による。

充分性：ΓをΛ_L^εの境界として，

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i}\frac{n!}{t^n}\int_\Gamma e^{t\lambda} R_{n+1}(\lambda)\, d\lambda$$

を考えると，$t \geqq (k+1)\varepsilon$ なら $T(t) \in L(X)$ であり，$t \geqq (k+2)\varepsilon$ なら $\frac{d}{dt}T(t) \in L(x)$ である。条件はとくに(A_e^∞)であることを意味しているから，$\varphi \in \mathcal{D}$, $x \in Y$ なら

$$\int_0^\infty \varphi(t) t^n T_\infty(t) x\, dt$$
$$= \int_{\omega - i\infty}^{\omega + i\infty} \hat{\varphi}(\lambda)\, n!\, (\lambda - A_\infty)^{-n-1} x\, d\lambda$$
$$= \int_{\omega - i\infty}^{\omega + i\infty} \hat{\varphi}(\lambda)\, n!\, R_{n+1}(\lambda)\, x\, d\lambda$$

となることがわかる。ここで$\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t\lambda}\varphi(t)\, dt$である。一方，$\mathrm{supp}(\varphi) \subset ((k+1)\varepsilon, \infty)$にとると，$x \in X$で

$$\int_0^\infty \varphi(t)\, t^n\, T(t)\, x\, dt = \int_\Gamma \hat{\varphi}(\lambda)\, n!\, R_{n+1}(\lambda)\, x\, d\lambda$$

となる。Paley-Wienerの定理から，

$$= \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \hat{\varphi}(\lambda)\, n!\, R_{n+1}(\lambda)\, x\, d\lambda .$$

これから，$t \geqq (k+1)\varepsilon$ なら，$T(t)=\overline{T_\infty(t)}$ である。証明終り。

定理 7 $A\in(Y)$ のとき，(A_c^∞, n, H) であるためには，ある $k \geqq 0$ と，$\rho_{n+1}(A)$ に含まれる角領域 $\Lambda_H=\{\lambda : |\arg(\lambda-\gamma)| \leqq \pi/2+\theta\}$，$(0<\theta<\pi/2)$ が存在して，$\lambda\in\Lambda_H$ ならば

$$\|R_{n+1}(\lambda)\| \leqq C(1+|\lambda|)^k$$

となることが必要十分である。

証明 必要性：$A\in(A_c^\infty, n, H)$ ならば $e^{\pm i\theta}\in(A^\infty, n)$ に注意すると，定理6と略同様の方針で示される。証明終り。

微分可能性と複素解析性の間にあるクラス，すなわち，Gevreyクラス，準解析的クラス，実解析的クラスについても論じることができる。これらは，超関数的半群のときと平行に行なわれる（Barbu[1], Ushijima[10]参照）。

References

[1] Barbu, V., Differentiable distribution semi-groups, Annali della Scuola Norm. Sup. 23, 413-429(1969).

[2] Chazarain, J., Problèmes de Cauchy au sens des distrubutions vectorielles et applications, C.R.Acad. Sci.Paris Sér. A, t., 266, 10-13(1968).

[3] Chazarain, J., Problemes de Cauchy abstraits et applications a quelques problemes mixtes. (to appear in J . Functional Analysis.).

[4] Da Prato, G., Semlgruppi di crescenza n., Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 20, 753-782(1966).

[5] Hille, E. and Phillips, R. S., Functional Analysis and Semi-groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 31(1957).

[6] Komura, T., Semi-groups of operators in a locally convex spaces, J. Functional Analysis, 2, 258-296(1968).

[7] Lions, J. L., Les semi-groupes distributions, Portugal Math., 19, 141-164(1960).

[8] Oharu, S., Semigroups of linear operators in a Banach space, (to appear).

[9] Ushijima, T., Some properties of regular distribution semi-groups, proc. Japan Acad., 45, 224-227(1969).

[10] 牛島照夫, 線形作用素の半群の滑らかさについて, 数理解析研究所講究録 93, 56-75(1970).

[11] Yoshida, K., Functional Analysis, Springer, Berlin, 1965.