数理解析研究所講究録
第121巻 1971年 69-82

Laplace作用素の Dissipativeな拡張について *

東京大学，教養　藤原大輔

§1 序

Ωを$\mathbb{R}^{n+1}$内の有界領域で，その境界をΓとする。$\overline{\Omega}=\Omega\cup\Gamma$が"境界のある$C^\infty$多様体"をなすと仮定する．$\Omega$上で定義された複素数値をとる関数$u$と実数$s$とに対して，$s$次ソボレフノルムを$\|u\|_s$と書く。

Ω内でLaplace作用素 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2}$ を斉次境界条件：$Bu|_\Gamma \underset{def}{=} \frac{\partial u}{\partial \nu}+(a+ib)u+(a_0+ib_0)u|_\Gamma=0$の下で考える。ここで$\nu$は$\Gamma$への単位外法線，$a$，$b$は，$C^\infty$実ベクトル場（$\Gamma$上），$a_0$，$b_0$は$\Gamma$上の$C^\infty$実関数である。

次の問題は難しい。

"適当に定数cを選ぶと，評価：

$$(1.1)\qquad -\mathrm{Re}\,(\Delta u,u)+c\|u\|_0^2\geqq 0$$

が，すべての$u\in C^2(\overline{\Omega})$で$Bu|_\Gamma=0$なる$u$に対して成立するような$(B,\Omega)$という組をすべて定めよ。"

---

*) この研究は，内山康一氏との共同で行われた。

一つの良く知られた必要条件は，ベクトル $b(x)$ の長さを $|b(x)|$ と書くと，

$$(1.2) \qquad |b(x)| \leqq 1, \qquad {}^{\forall}x \in \Gamma$$

である．

一方，J. L. Lions [3] は，任意の $x \in \Gamma$ に対して $|b(x)| < 1$ であれば，評価 (1.3) が成立することを示した。

$$(1.3) \qquad -\mathrm{Re}(\Delta u, u) + C_1 \|u\|_0^2 \geq C_0 \|u\|_1^2$$

$$C_1,\ C_0 > 0 \quad \text{const.}$$

ここでは，(1.2) を仮定して，評価

$$(1.4) \qquad -\mathrm{Re}(\Delta u, u) + C_1 \|u\|_0^2 \geq C_0 \|u\|_{1/2}^2$$

$$C_1,\ C_0 > 0 \quad \text{const.}$$

が $Bu|_\Gamma = 0$ をみたすすべての $u \in C^2(\bar{\Omega})$ に対して成立するための条件を求めたい。

我々は，一つの必要十分条件を得たが，$n \geqslant 3$ のときはまだ十分 explicit とは云えない。ここでは $n=2$ すなわち Ω が $\mathbb{R}^3$ の部分領域のとき，この必要十分条件を与えて，一般の n のときは，一つの十分条件，一つの必要条件を与える。いずれも Ω の幾何学的形状にも言及することに注意されたい。

評価 (1.4) は局所化できることが分っている。(Fujiwara [2])．従って，Lions の結果を考慮すると，困難さは，

$|b(x_0)|=1$ となる点 $x_0\in\Gamma$ の近くで起ることが知られよう。関数 $l(x) \underset{\mathrm{def}}{=} 1-|b(x)|^2$, $x\in\Gamma$ を導入する。仮定 (1.2) から，$l(x)\geqq 0$ で，x_0 は $l(x)$ の critical point である。x_0 での $l(x)$ の Hessian を $L(x_0)$ とおく。Γ の接空間 $T_{x_0}(\Gamma)$ は内積 $\langle\ ,\ \rangle$ によって，その dual と同一視され，$L(x_0)$ は $T_{x_0}(\Gamma)$ の線型変換と考えられる。Γ 上の接ベクトル場 $a(x)$ を用いて $\nabla_* a : T_{x_0}(\Gamma)\longrightarrow T_{x_0}(\Gamma)$ なる線型変換を，$T_{x_0}(\Gamma)\ni\xi \longmapsto \nabla_\xi a\in T_{x_0}(\Gamma)$ によって定義する。超曲面 Γ の第2基本型式を $T_{x_0}(\Gamma)\times T_{x_0}(\Gamma)\ni(\xi,\eta) \longmapsto \omega_{x_0}(\xi,\eta)\in\mathbb{R}$ と書く。また，$x_0\in\Gamma$ における Γ の第一平均曲率を $M(x_0)$ とかく。（ここでは Ω の内部の方向を＋とした。）

<u>定理 1</u>　評価 (1.4) が成立すれば，次の2条件が成立する。

(i)　${}^\forall x\in\Gamma$ で，$|b(x)|\leqq 1$.

(ii)　$|b(x_0)|=1$ なるすべての点 $x_0\in\Gamma$ で，次の不等式が成立する。

$$(1.5)\quad \sqrt{n-1}\Big(\tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\,L(x_0)-\tfrac{1}{2}\langle L(x_0)b(x_0),b(x_0)\rangle-|\nabla_{b(x_0)}b|^2 + \mathrm{Tr}\,{}^t(\nabla_* b)(\nabla_* b)-\mathrm{Tr}\,(\nabla_* b)^2\Big)^{1/2} + \omega_{x_0}(b(x_0),b(x_0)) - n\,M(x_0) + 2a_0(x_0) - \mathrm{Tr}\,(\nabla_* a) > 0$$

<u>定理2</u>　次の条件 (a) (b) が成り立てば，評価 (1.4) は成り立つ。

(a)　$\forall x \in \Gamma$ で　$|b(x)| \leqq 1$

(b)　$\left[\frac{1}{2} \mathrm{Tr}\, L(x_0) - \frac{1}{2} \langle L(x_0) b(x_0), b(x_0) \rangle - |\nabla b(x_0) b(x_0)|^2 + \right.$

(1.6)　$\left. + \mathrm{Tr}\, {}^t(\nabla_* b)(\nabla_* b) - \mathrm{Tr}\,(\nabla_* b)^2 \right]^{1/2} +$

$+ \omega_{x_0}(b(x_0), b(x_0)) - n M(x_0) + 2 a_0(x_0) - \mathrm{Tr}(\nabla_* a) > 0$

なる不等式が，$b(x_0) = 1$　となる各点 x_0 で成立すること。

<u>系 3</u>　$n = 2$ ならば，定理1の条件 (i) (ii) は，評価 (1.4) が成立するための必要十分条件である。

§2. グリーンの公式

S を単位円周で，その上の generic な点を s とかく。$\overline{\Omega} \times S$ での C^∞ 関数 $u(x, s)$ に対して，その $\Gamma \times S$ への制限 $\varphi(x, s)$ は C^∞ 関数である。次の Dirichlet 問題はとける。

(2.1)　$\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) w(x, s) = 0$　in $\Omega \times S$

$w(x, s)|_\Gamma = \varphi(x, s)$.

$\varphi \longmapsto w$　の対応を P とする。$w = P\varphi$. P を Poisson 作用素と呼ぶことにする。$v = u - w$　とおくと，分解

(2.2)　$u = v + w$

ができる。さらに，uが，境界条件 $Bu|_\Gamma = 0$ をみたすとすると，Green の公式から

$$(2.3)\qquad -\mathrm{Re}\iint_{\Omega\times S}\left(\Delta+\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)u\cdot\bar{u}\,dx\,ds$$
$$= -\mathrm{Re}\iint_{\Omega\times S}\left(\Delta+\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)v\cdot\bar{v}\,dx\,ds + \mathrm{Re}\iint_{\Gamma\times S} T\varphi(x,s)\,\overline{\varphi(x,s)}\,d\gamma\,ds$$

を得る。ここで $d\gamma$ は Γ の hypersurface element である。T は $\Gamma\times S$ 上での一階の擬微分作用素で，次のように定義される。

$$(2.4)\qquad T\varphi = \left.\frac{\partial P\varphi}{\partial\nu}\right|_{\Gamma\times S} + (a+ib)\varphi + (a_0+ib_0)\varphi.$$

評価 (1.4) が成立することと，次の評価 (2.5) が成立することとは同値であることが，知られる．(Fujiwara [2])

$$(2.5)\qquad \mathrm{Re}(T\varphi,\varphi) + C_1\|\varphi\|^2_{-1/2} \geqq C_0\|\varphi\|^2_0 .$$

$$C_1,\quad C_0>0\quad : \text{const.}$$

評価 (2.5) を考察するため，作用素 T のシンボルを求めよう。

§3. Poisson 作用素

まず，Poisson operator P のシンボル (Boutet de Monvel [1]) を求める。x_0 を Γ の任意の一点として固定する。x_0 の近傍で，次の座標系をとる。x_0 を原点とし，$y_1,\cdots,y_n$ 軸を Γ の接超平面上で．x_0 での主曲率方向と一致させてとる。y_{n+1} 軸は，内法線方向とする。Ω は，不等式

とし

(3.1) $\quad y_{n+1}-\varphi(y')>0$

で与えられる。$\varphi(y')$ は $y'=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ の C^∞ 関数で

(3.2) $\quad \varphi(y')=\sum_j \omega_j y_j^2+\sum_{ijk} \omega_{ijk} y_i y_j y_k+O(|y'|^4)$

で与えられるとして良い。ω_j, ω_{ijk} は定数で、ω_{ijk} は i, j, k に関し；対称とする。以下，i, j, k 等についての和は，1から n 迄独立にとるとする。Einsteinの規約は，使わない。

任意の実ベクトル $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$，$\eta=(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ に対して，双線型写像，$\omega_{x_0}(\xi, \eta)=2\sum_j \omega_j \xi_j \eta_j$ が才2基本型式で，$\frac{2}{n}\sum_j \omega_j$ が才一平均曲率 $M(x_0)$ であった。

変数変換をする。$x=(x', x_{n+1})$，$x'=(x_1, \ldots, x_n)$ を

(3.3)
$$\begin{cases} y_i = x_i - \dfrac{x_{n+1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{\sqrt{1+\sum_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2}}, \quad i=1,2,\cdots n \\[2ex] y_{n+1} = \varphi(x') + \dfrac{x_{n+1}}{\sqrt{1+\sum_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2}} \end{cases}$$

で与える。Jacobianは，原点で1だから，原点の近くで $(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})$ は座標となる。Taylor展開してみると

$$x_i = y_i + 2\omega_i y_i y_{n+1} + 4\omega_i^2 y_i y_{n+1}^2 - 2\omega_i y_i \left(\sum_j \omega_j y_j^2\right) + 3y_{n+1}\sum_{j,k}\omega_{ijk} y_j y_k + O(|y|^4)$$

$$x_{n+1} = y_{n+1} - \sum_i \omega_i y_i^2 - 2\left(\sum_i \omega_i^2 y_i^2\right) y_{n+1} - \sum_{ijk}\omega_{ijk} y_i y_j y_k + O(|y|^4).$$

従って，空間の計量は，

$$ds^2 = (dy_1)^2 + \cdots + (dy_{n+1})^2 \tag{3.4}$$
$$= \sum_i (dx_i)^2 + 4(\sum_i \omega_i x_i dx_i)^2 + (dx_{n+1})^2 + O(|x|^3).$$

新しい座標系で，$-(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial s^2})$ の主シンボルと才2シンボルは，

$$\sum_j (1 + 4\omega_j x_{n+1} + 12\omega_j^2 x_{n+1}^2 + O(|x|^3))\xi_j^2 + \xi_{n+1}^2 + \sigma^2$$
$$+ \sum_{i,j} \{12 x_{n+1}(\sum_k \omega_{ijk} x_k) - 4\omega_i\omega_j x_i x_j + O(|x|^3)\}\xi_i\xi_j \tag{3.5}$$
$$-2i\sum_j \{-2(\sum_i \omega_i\omega_j x_j) + 3x_{n+1}(\sum_i \omega_{iij}) + O(|x|)\}\xi_j$$
$$+ 2i(\sum_j \omega_j + 2x_{n+1}\sum_j \omega_j^2 + 3\sum_{ij}\omega_{iij} x_j + O(|x'|))\xi_{n+1}.$$

$-(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial s^2})$ の主シンボルを $A_2(x, \xi', \xi_{n+1}, \sigma)$ とする。これを ξ_{n+1} の2次多項式とみて，Imaginary 部分 $\geqq 0$ の根を $\tau^{\pm}$ とする。$\tau^{\pm}$の Taylor 展開は，

$$\tau^{\pm} = \pm i(\rho_1 - 2\rho_1^{-1}\sum_{ij}\omega_i\omega_j x_i x_j \xi_i\xi_j + O(|x|^3)). \tag{3.6}$$

ここで，$\rho_1 = (|\xi'|^2 + \sigma^2)^{1/2}$，$\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$.

さて，$-\Delta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}$ の基本解を F とし，そのシンボルの漸近展開を

$$f(x, \xi, \sigma) \sim f_{-2}(x, \xi, \sigma) + f_{-3}(x, \xi, \sigma) + \cdots$$

とすると，主シンボル $f_{-2}(x, \xi, \sigma)$ は，

$$f_{-2}(x, \xi, \sigma) = \rho^{-2} - 4\rho^{-4} x_{n+1}(\sum_j \omega_j \xi_j^2)$$
$$+ 16\rho^{-6} x_{n+1}^2 (\sum_j \omega_j \xi_j^2)^2 - 12\rho^{-4} x_{n+1}^2 (\sum_j \omega_j^2 \xi_j^2)$$
$$- \rho^{-4}\sum_{ij}\{12 x_{n+1}(\sum_k \omega_{ijk} x_k) - 4\omega_i\omega_j x_i x_j\}\xi_i\xi_j$$
$$+ O(|x|^3)\rho^{-2}$$

ここで $\rho = \sqrt{|\xi|^2+\sigma^2}$. 第2シンボルは

(3.8) $$f_{-3}(x,\xi,\sigma) = -2i\,\xi_{n+1}\left(4\rho^{-6}\sum_i \omega_i \xi_i^2 + \rho^{-4}\sum \omega_j\right) + O(|x|)\rho^{-3}$$

τ^+ を主シンボルとする一位の擬微分作用素を T^+ とおく。作用素 $Q: C_0^\infty(\Gamma\times S) \longrightarrow Q\varphi \in C^\infty(\bar\Omega)$ を

(3.9) $$Q\varphi = \mathcal{F}\left(i\frac{\partial \delta(\Gamma\times S)}{\partial \nu}\otimes\varphi - \delta(\Gamma\times S)\otimes T^+\varphi\right)$$

で定義する。ここで $\delta(\Gamma\times S)\otimes\varphi$ は次のような超関数。

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}\times S)\ni\phi \longmapsto \int_{\Gamma\times S}\phi|_{\Gamma\times S}\cdot\varphi\, d\gamma\, ds.$$

作用素 Q は, Boutet de Monvel の意味で, 擬 Poisson 作用素で, そのシンボルは, 次のようにして得られる。

(3.9) $$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{ f_{-2}(x',0,\xi',\xi_{n+1},\sigma)(\xi_{n+1}-\tau^-)\\
&\quad + x_{n+1}\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} f_{-2}(x',0,\xi',\xi_{n+1},\sigma)(\xi_{n+1}-\tau^-)\\
&\quad - \sum_j \frac{\partial}{\partial\xi_j} f_{-2}(x',0,\xi',\xi_{n+1},\sigma)\left(-i\frac{\partial}{\partial x_j}\tau^-\right)\\
&\quad + f_{-3}(x',0,\xi',\xi_{n+1},\sigma)(\xi_{n+1}-\tau^-)\Big\} e^{ix_{n+1}\xi_{n+1}}d\xi_{n+1}\\
&\quad + O((x_{n+1}\rho_1^{-1})^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i\,e^{-x_{n+1}}(\rho_1 - 2\rho_1^{-1}\sum_{ij}\omega_i\omega_j x_i x_j \xi_i\xi_j + O(|x|^3)\\
&\quad - i\,x_{n+1}\left(\sum_j \omega_j\xi_j^2 + 3\sum_{ijk}\omega_{ijk}x_k\xi_i\xi_j + O(|x'|^2)\right)\times\\
&\qquad \times(2x_{n+1}\rho_1^{-1}+\rho_1^{-2})\,e^{-x_{n+1}\rho_1}\\
&\quad + \left(\sum_{jk}^{n}\omega_j\omega_k\xi_k x_k\xi_j^2\rho_1^{-1}\right)\left(2x_{n+1}\rho_1^{-2}+2\rho_1^{-3}+O(|x'|)\right)e^{-x_{n+1}\rho_1}\\
&\quad + i\left(\sum\omega_j\xi_j^2\right)\left(x_{n+1}^2\rho_1^{-1}-(2\rho_1^3)^{-1}\right) + i\left(\sum\omega_i\right)\times\\
&\qquad \times\left(x_{n+1}-(2\rho_1)^{-1}\right)e^{-\rho_1 x_{n+1}}
\end{aligned}$$

ここで　$\rho_1 = (|\xi'|^2 + \sigma^2)^{1/2}$.

これから，$\mathcal{K} : \varphi \longmapsto Q\varphi|_{\Gamma\times S}$ という写像は，一階の楕円型擬微分作用素であることが分る。そのシンボルは，

$$-i\left(1 - \frac{1}{2}\left(\sum_j \omega_j \xi_j^2\right)\rho_1^{-3} - \frac{1}{2}\left(\sum_j \omega_j\right)\rho_1^{-1} + \cdots\right).$$

$\mathcal{K}^{(-1)}$ をそのパラメトリックスとする。作用素

$$Q\mathcal{K}^{(-1)}\varphi = \mathcal{F}\left(i\frac{\partial\delta(\Gamma\times S)}{\partial\nu}\otimes \mathcal{K}^{(-1)}\varphi - \delta(\Gamma\times S)\otimes T\mathcal{K}^{(-1)}\varphi\right)$$

は Poisson 作用素 P と同じシンボルをもつ。P のシンボルは，したがって，

$$
\begin{aligned}
(3.11)\qquad & e^{-x_{n+1}}\left(\rho_1 - 2\rho_1^{-1}\left(\sum_j \omega_j x_j \xi_j\right)^2 + O(|x'|^2)\right)\\
& - x_{n+1}\left(\left(\sum_j \omega_j \xi_j^2\right)\rho_1^{-2} + O(|x'|)\right)e^{-x_{n+1}\rho_1}\\
& + x_{n+1}\left(\sum_j \omega_j + O(|x'|)\right)e^{-x_{n+1}\rho_1}\\
& + O\left((x_{n+1}\rho_1^{-1})^2\right)
\end{aligned}
$$

よって，$\varphi \longmapsto \frac{\partial}{\partial\nu}P\varphi|_{\Gamma\times S}$ は擬微分作用素で，その主シンボルは，

$$(3.12)\qquad \rho_1 - 2\rho_1^{-1}\left(\sum_j \omega_j x_j \xi_j\right)^2 + O(|x'|^2)$$

その第２シンボルは，

$$(3.13)\qquad \left(\sum \omega_j \xi_j^2\right)\rho_1^{-2} - \sum_j \omega_j + O(|x'|).$$

次に Γ でのベクトル場，$a(x)$，$b(x)$ の Taylor 展開を，

$$(3.14)\qquad a(x) = \sum_j\left(\alpha_j + \sum_k \alpha_{jk}x_k + O(|x|^2)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$(3.15)\qquad b(x) = \sum_j\left(\beta_j + \sum_k \beta_{jk}x_k + \sum_{jkl}\beta_{jkl}x_k x_l + O(|x|^3)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

とする。 作用素 $\mathrm{Re}\,T$ のシンボルを書き下すことができる。

$\mathrm{Re}\,T$ の主シンボル $t_1(x, s, \xi, \sigma)$ は,

$$(3.16) \quad t_1(x, s, \xi, \sigma) = \rho_1 - 2\rho_1^{-1}\Big(\sum_j \omega_j x_j \xi_j\Big)^2 - \sum_j \Big(\beta_j + \sum_k \beta_{jk} x_k + \sum_{jk\ell} \beta_{jk\ell}\, x_k x_\ell\Big)\xi_j + O(|x'|^3)\rho_1$$

第2シンボル $t_0(x, s, \xi, \sigma)$ は,

$$(3.17) \quad t_0(x, s, \xi, \sigma) = \sum_j \omega_j \xi_j^2 \rho_1^{-2} - \Big(\sum_j \omega_j\Big) + a_0(x_0) - \frac{1}{2}\sum_j d_{jj} + O(|x'|).$$

§4 定理の証明

$x_0 \in \Gamma$ で $|b(x_0)|^2 = 1$ とする。上の座標系のとり方で

$$(4.1) \quad \sum_j \beta_j^2 = 1.$$

一方 $\ell(x) \geqq 0$ だったから (3.4) を使って,

$$(4.2) \quad \sum_j \beta_j \beta_{jk} = 0$$

であって, $\ell(x)$ の x_0 での Hessian $L(x_0)$ は non negative 対称行列で, 次のように与えられる。

$$(4.3) \quad \frac{1}{2}\langle \xi, L(x_0)\xi \rangle = -4\Big(\sum_j \omega_j \xi_j \beta_j\Big)^2 - \sum_j\Big(\sum_k \beta_{jk}\xi_k\Big)^2 - 2\sum_{jk\ell}\beta_j \beta_{jk\ell}\xi_k \xi_\ell.$$

ただし, $\langle\ ,\ \rangle$ は接ベクトル空間 $T_{x_0}(\Gamma)$ の自然な内積.

一方 $|\nabla_\xi b|^2 = \sum_j\Big(\sum_k \beta_{jk}\xi_k\Big)^2$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in T_{x_0}(\Gamma)$,

だから,

$$(4.4) \quad \frac{1}{2}\langle \xi, L(x_0)\xi \rangle + |\nabla_\xi b|^2 = -4\Big(\sum_j \omega_j \xi_j \beta_j\Big)^2 - 2\sum_{jk\ell}\beta_j \beta_{jk\ell}\xi_k \xi_\ell.$$

以上を準備として定理を証明して行こう。

ReT の主シンボルは cotangent bundle 上の点 $(x_0, b(x_0))$ で 0 となった。(即ち, $x=0$, $\xi=\beta$, $\sigma=0$) ここでの Hessian を $H(x_0)$ とする。

X で縦ベクトル $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \eta_1, \cdots, \eta_n, s, \sigma)$ ($2n+2$ 次元) をあらわし, $\langle\!\langle X, Y \rangle\!\rangle$ で X と $Y=(y_1, \cdots, y_n, \xi_1, \cdots, \xi_n, s', \sigma')$ の内積 $\sum x_j y_j + \sum_j \xi_j \eta_j + s s' + \sigma\sigma'$ をあらわすと,

$$\frac{1}{2}\langle\!\langle HX, X \rangle\!\rangle = \frac{1}{2}\Big(\sum_j \eta_j^2 + \sigma^2\Big) - \frac{1}{2}\Big(\sum_j \beta_j \eta_j\Big)^2 - \sum_{pk} \beta_{pk} x_k \eta_p - 2\Big(\sum_j \omega_j \beta_j x_j\Big)^2 - \sum_{jk\ell} \beta_j \beta_{jk\ell} x_k x_\ell . \tag{4.5}$$

$n \times n$ matrices を導入しよう。

$$A = \begin{pmatrix} \omega_1^2\beta_1^2, & \omega_1\omega_2\beta_1\beta_2, & \cdots, & \omega_1\omega_n\beta_1\beta_n \\ \omega_2\omega_1\beta_1\beta_2, & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \omega_n\beta_n\omega_1\beta_1 & \cdots & \cdots & \omega_n^2\beta_n^2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \sum_j \beta_j\beta_{j11}, & \sum \beta_j\beta_{j12}, & \cdots, & \sum_j \beta_j\beta_{j1n} \\ \sum_j \beta_j\beta_{j21} & & & \\ \vdots & & & \\ \sum_j \beta_j\beta_{jn1} & \cdots & \cdots & \sum_j \beta_j\beta_{jnn} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \beta_1^2 & \cdots & \beta_1\beta_n \\ \vdots & & \\ \beta_n\beta_1 & \cdots & \beta_n^2 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

そうすると，$H(x_0)$ は

$$H = H(x_0) = \begin{pmatrix} -4A-2B, & -{}^tC & 0 & 0 \\ -C & , I-D, & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

つぎに，$2n+2$ 次の複素構造

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ただし } J_0 = \left.\overbrace{\begin{pmatrix} 0, & -I \\ I, & 0 \end{pmatrix}}^{2n}\right\}2n$$

を導入する．JH の固有値は純虚数ばかりで，実軸に関して対称に分布する．$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は Nilpotent である。よって iJH の正固有値は，iJ_0H_0 の正固有値と一致する。

H_0 は $H_0 = \begin{pmatrix} -4A-2B & , -{}^tC \\ -C & , I-D \end{pmatrix}$．一方，$ReT$ の主シンボルは斉次だから，$\mathrm{rank}\, H_0$ は高々 $2n-1$．これから iJ_0H_0 の正固有値の数は $n-1$ を越えないことが分る。$\mu_1(x_0), \cdots, \mu_{n-1}(x_0)$ を iJ_0H_0 の負でない固有値とする．Anders Melin の得た定理を作用素 ReT に用いて，評価 (2.5) を経て，

<u>定理 4.</u>

任意の $C^2(\bar{\Omega})$ 関数で $Bu|_\Gamma = 0$ なるものに対して，評価(1.4)が成立する必要十分条件は，

(1) $\forall x \in \Gamma$ に対して $|b(x)| \leqq 1$

(2) $|b(x_0)| = 1$ になる任意の $x_0 \in \Gamma$ に対して，不等式

$$\frac{1}{2}(\mu_1(x_0) + \cdots + \mu_{n-1}(x_0)) + \mathrm{Re}\, t_0 > 0$$

が成立することである．ここで $\mathrm{Re}\, t_0$ は

$$\mathrm{Re}\, t_0 = \frac{1}{2}\omega_{x_0}(b(x_0), b(x_0)) - \frac{n}{2}M(x_0) + a_0(x_0) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\nabla_* a$$

とかける．

$\mu_1(x_0) + \cdots + \mu_{n-1}(x_0)$ は今のところ explicit に書きあらわせないので，次の評価でこれをおきかえる．

$$(\mu_1^2 + \cdots + \mu_{n-1}^2)^{1/2} \leqq \mu_1 + \cdots + \mu_{n-1} \leqq \sqrt{n-1}\,(\mu_1^2 + \cdots + \mu_{n-1}^2)^{1/2}.$$

即ち，

(4.6) $$\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(J_0H_0)^2\right]^{1/2} \leqq \mu_1(x_0) + \cdots + \mu_{n-1}(x_0) \leqq \sqrt{n-1}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(J_0H_0)^2\right]^{1/2}.$$

前に出て来た座標系を使ってやれば，

$$\mathrm{Tr}(J_0H_0)^2 = 2(\mathrm{Tr}\, C^2 - \mathrm{Tr}(I-D)(-4A-2B))$$

から

$$\mathrm{Tr}(J_0H_0)^2 = 2\Big(\sum_{pk}\beta_{pk}\beta_{kp} + 4\sum_j \omega_j^2\beta_j^2 + 2\sum_{ij}\beta_i\beta_{ijj} - 4\sum_{jk}\omega_j\omega_k\beta_j^2\beta_k^2 - 2\sum_{ijk}\beta_i\beta_k\beta_j\beta_{ijk}\Big)$$

これに，(4.4) を使って，座標系によらぬ表現として，

$$\mathrm{Tr}(J_0H_0)^2 = 2\Big\{-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, L(x_0) - \mathrm{Tr}\, {}^t(\nabla_* b)(\nabla_* b) + \mathrm{Tr}(\nabla_* b)^2 + \frac{1}{2}\langle b(x_0), L(x_0)b(x_0)\rangle + |\nabla_{b(x_0)} b|^2\Big\}.$$

これと (4.6) を定理4に用いて，定理1，定理2を得る．

系3は，$n=2$ のときの

$$\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(J_0 H_0)^2\right)^{1/2} = \mu_1(x_0)$$

による。

§5. 注意

(イ) $a \equiv 0$ であって，b の interior differentiation と $a_0 + ib_0$ が適当な関係にあれば，$Bu|_\Gamma = 0$ なる境界条件で考えた Δ は形式的 self-adjoint 作用素となるが，もしこれが，定理2，3あるいは4の条件をみたせば，Friedrichs 拡張が存在することが証明されたことになる。

(ロ) 以上の理論を高階の作用素に行うことは試みていない。

文献

[1] Boutet de Monvel, Pseudo-noyeaux de Poisson. C. R. Acad. Sc. Paris, 1966

[2] Fujiwara, D. On some homogeneous boundary value problems bounded below. J. Fac. Sc. Univ. Tokyo. 17. 1970. 123–152.

[3] Lions, J. L. Sur les problemes aux limites du type derivees obliques. Ann. of Math. 64 (1959) 207–239

[4] Melin, A. Lower bound for pseudo-differential operators. Pre-print. Inst. Mitteg-Leffler.