数理解析研究所講究録
第123巻 1971年 81-90

有限オートマトンの一般化

東北大 工学部 高浪五男
東北大 通研 本多波雄

§1. 序

オートマトン理論における入力語はアルファベットΣから作られる語，すなわちΣの上の自由半群（モノイド）の元として与えられ，オートマトンはテープ上の記号（Σの元）をつぎつぎに走査してゆく．このとき，Σの元は単位の長さをもっていると考えることができる．この"単位の長さ"というものをより一般的に考え，その生成系が有限集合で，かつそれによる分解が唯一であるようなアルゴリズムが存在する半群（S・）の上の有限オートマトンについて考察する．この半群の元は単位の長さをもつ元からなる生成系によって分解され，つぎつぎにオートマトンに入力される．このようなオートマトンを半群（S・）の上のオートマトンと呼び，これによって受理されるSの部分集合を（S・）－正規集合と定義する．このとき，通常のオートマトン理論におけると同

様の諸結果が得られる．これらの結果を通常のオートマトン理論に応用して，以下の結果を得る．自由モノイド（Σ^*・）を基本の半群として，これから帰納的に上述の性質をもつ半群の無限列を構成する．このとき，真の包含関係に関して，その最小のクラスが正規集合（regular set）のクラスであるようなΣ^*の部分集合のクラスの無限鎖が存在し，かつ各クラスは正規集合と同様の性質をもっていることを示す．このことは，正規集合のクラスより大きなクラスで正規集合のクラスと同様の性質（例えば，二つの集合の等価性などが決定可能である）をもつものが存在するという意味で興味あることである．ついで，これらのクラスのほとんどは，コンテキストフリー言語のクラスに含まれないこと，さらに，これらのクラスのすべては決定性リニアバウンデットオートマトンによって受理される語の集合のクラスの真の部分クラスであることを示す．

§2．半群の帰納的構成とその性質

Σをアルファベット，（Σ^*・）をΣの上の自由半群とする．Σ^*の元xに対して，L（x）＝（xのΣの元の個数）とする．k_1，k_2を与えられた互いに素なる正整数とする．Σ^*の元yについて，$y = y' \varphi_y y''$，（L（y'）／L（y''）＝ k_1 / k_2，

$L(\varphi_y) < k_1 + k_2$）によって y を分解すれば，この分解は一意に定まる．Σ^* の元，x，y に対し，$x \circ y = y' x y''$（ただし，$y = y' \varphi_y y''$）によって演算 $\circ$ を定義すれば，（$\Sigma^* \circ$）は右単位元を有する半群（右モノイド）となる．Σ^* から非負整数の集合Rの中への関数 $\mathcal{L}$ を，$x \in \Sigma^*$ に対して，$L(x) = m(k_1 + k_2) + r$，$0 \leq r < k_1 + k_2$ ならば，$\mathcal{L}(x) = m$ と定める．このとき，$\mathcal{L}(x \circ y) = \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y)$ が成り立ち，（$\Sigma^* \circ$）の任意の単位元 e に対して，$\mathcal{L}(e) = 0$ で，単位元以外の元 x について，$\mathcal{L}(x) > 0$ である．このような $\mathcal{L}$ を（$\Sigma^* \circ$）における長さ関数という．ついで，（$\Sigma^* \circ$）について，互いに素なる正整数 l_1，l_2 によって，上述のような分解が定義され，右モノイド（$\Sigma^* \circ'$）が構成される．これを（$\Sigma^* \circ_2\ k_1/k_2,\ l_1/l_2$）で表わす．このように帰納的に構成される右モノイド（S・）について，以下のことが成り立つ．

（I）　少なくとも一つの有限生成系 $G = \{a_1, \cdots, a_n, e_1, \cdots, e_m\}$ をもち，アルゴリズムによって，Sの各元は唯一に分解される．ここで，$\mathcal{E} = \{e_1, \cdots, e_m\}$ は単位元の集合，$\mathcal{A} = \{a_1, \cdots, a_n\}$ は単位元ではない元の集合である．

（II）　$x \in S$ について，x の分解を $x \overset{d}{=} x_1 \cdots x_p$，各 $x_i \in G$ とすると，

(i)　$1 \leq i \leq p$ について，

$x_1 \cdots x_i \overset{d}{=} x_1 \cdots x_i, \quad x_{i+1} \cdots x_p \overset{d}{=} x_{i+1} \cdots x_p$

(ii)　$i < j$ のとき，

$x_1 \cdots x_i \cdot x_j \cdots x_p \overset{d}{=} x_1 \cdots x_i x_j \cdots x_p$

(III)　$x \overset{d}{=} x_1 \cdots x_p$，$y \overset{d}{=} y_1 \cdots y_q$ とするとき，$j < p$，$i > 1$ について，

$x_1 \cdots x_j \cdot y_i \cdots y_q \overset{d}{=} x_1 \cdots x_j \cdot y_i \cdots y_q$

特に，$y_1 \notin \mathcal{E}$ ならば，

$x_1 \cdots x_j \cdot y_1 \cdots y_q \overset{d}{=} x_1 \cdots x_j \cdot y_1 \cdots y_q$

(IV)　$x \overset{d}{=} x_1 \cdots x_p$，$y \overset{d}{=} y_1 \cdots y_q$ とするとき，

$y \notin \mathcal{E}$ ならば，$i > 1$ について，

$x_1 \cdots x_p \cdot y_i \cdots y_q \overset{d}{=} x_1 \cdots x_{p-1} \overline{x}_p \cdot y_i \cdots y_q$ で，$\overline{x}_p$ は $y_i \cdots y_q$ に無関係に x_p からだけによって唯一に定まり，$\mathcal{L}(x_p) = \mathcal{L}(\overline{x}_p)$ である．

$y \in \mathcal{E}$ ならば，$x \cdot y = x \overset{d}{=} x_1 \cdots x_n$

(V)　$x \notin \mathcal{E}$ について，$x \overset{d}{=} x_1 \cdots x_p$ とするとき，$e \in \mathcal{E}$ について，

$x_1 \in \mathcal{A}$ ならば，$e x \overset{d}{=} \overline{e} x_1 \cdots x_p$

$x_1 \in \mathcal{E}$ ならば，$e x \overset{d}{=} \overline{e} x_2 \cdots x_p$

で，$\overline{e}$ は e から（x とは無関係に）唯一に定まる．

つぎに，これらの条件を満たす（S・）の上の有限オート

マトンを定義し，その性質を調べる.

§3　（S・）の上の有限オートマトン

$x \triangleq x_1 \cdot x_2 \cdots x_p$ とするとき，φ_x は，$x_1 \in \mathcal{E}$ なら $\varphi_x = x_1$，$x_1 \notin \mathcal{E}$ なら，$\varphi_x = e_1 \in \mathcal{E}$ （$e_1 x = x$）を意味するものとする.

$\mathcal{A}$ と $\mathcal{E}$ の上の同値関係 $\widetilde{\mathcal{A}}$，$\widetilde{\mathcal{E}}$ をそれぞれつぎのように定める.

$a_i,\ a_j \in \mathcal{A}$ について，$a_i \widetilde{\mathcal{A}} a_j \Leftrightarrow \overline{a_i} = \overline{a_j}$

$e_i,\ e_j \in \mathcal{E}$ について，$e_i \widetilde{\mathcal{E}} e_j \Leftrightarrow \overline{e_i} = \overline{e_j}$

関係 $\widetilde{\mathcal{A}}$ による $\mathcal{A}$ の分割を，$\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} / \widetilde{\mathcal{A}} = \{ \overline{a}_1, \cdots, \overline{a}_n \}$

関係 $\widetilde{\mathcal{E}}$ による $\mathcal{E}$ の分割を，$\overline{\mathcal{E}} = \mathcal{E} / \widetilde{\mathcal{E}} = \{ \overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_m \}$

とし，$\overline{G} = \overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{E}}$ とする.

関係 $\widetilde{\mathcal{A}}$ は S の上まで拡張できる．すなわち，$x,\ y \in S - \mathcal{E}$ について，$x \triangleq x_1 \cdots x_p$，$y \triangleq y_1 \cdots y_q$ とするとき（各 x_i，$y_i \in G$），$x \widetilde{\mathcal{A}} y \Leftrightarrow x_p \widetilde{\mathcal{A}} y_q$．S の上の関係 $\widetilde{\mathcal{A}}$ は明らかに有限である.

つぎに，このような条件を満たす半群（S・）の上の有限オートマトンを定義し，その性質を論じる.

定義　G に関する（S・）の上の有限オートマトン（以下 “G に関する” は略す）は 5‐組 $A = \langle V,\ f,\ v_0,\ \psi,\ E \rangle$ である．ここに，V は空でない内部状態の有限集合，f は

$V \times G \to V$なる遷移関数で，$\forall v \in V$，$\forall e \in \mathcal{E}$，$f(v, e) = v$である．$v_0 \in V$は初期状態，$\psi$は$V$から$\mathcal{E}$の部分集合の集合$2^{\mathcal{E}}$の中への写像，$E$は$\mathcal{E}$の部分集合である．

fの定義域は$V \times G$から$V \times S$に拡張することができる．すなわち，$x \in S$について，$x \overset{d}{=} x_1 \cdots x_n$とするとき（各$x_i \in G$），$x_1 \cdots x_i \overset{d}{=} x_1 \cdots x_i$，$x_{i+1} \cdots x_n \overset{d}{=} x_{i+1} \cdots x_n$であるから，$f(v, x) = f(f(v, x_1 \cdots x_i), x_{i+1} \cdots x_n)$で定義される．

定義　Sの元xが（Gに関して）（$S \cdot$）の上のオートマトン$A = \langle V, f, v_0, \psi, E \rangle$によって受理されるとは，$x \in \mathcal{E}$については$x \in E$，$x \notin \mathcal{E}$については$\varphi_x \in \psi(f(v_0, x))$のときそのときをいう．$A$の behavior とは$T(A) = E \cup \{x \in S - \mathcal{E} \mid \varphi_x \in \psi(f(v_0, x))\}$である．

定義　Rを（$S \cdot$）の上の同値関係で，βをSの部分集合とする．Rがβを refine するとは，$(x, y) \in R$ならば，$\forall e \in \mathcal{E}$，$(ex \in \beta \Leftrightarrow ey \in \beta)$，$x \not\equiv y$，かまたは$x, y \in \mathcal{E}$，$(x \in \beta \Leftrightarrow y \in \beta)$のときそのときをいう．

定義　$x \notin \mathcal{E}$について，$x \overset{d}{=} x_1 \cdots x_n$とするとき，

$$\hat{x} = \begin{cases} e_1 & n = 1 \text{ のとき} \\ x_1 \cdots x_{n-1} & n \geq 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

によって$\hat{x}$を定義する．

補題１　$A=\langle V, f, v_0, \psi, E\rangle$を$(S\cdot)$の上のオートマトンとする．$(S\cdot)$の上の関係$\rho$を，$(x, y)\in\rho \Leftrightarrow {}^{\forall}v\in V, f(v, \hat{x})=f(v, \hat{y}), \psi(f(v, x)) = \psi(f(v, y)), x \mathcal{A} y$，または$x, y\in\mathcal{E}, (x\in E \Leftrightarrow y\in E)$と定義すれば，$\rho$は$T(A)$をrefineする右合同関係で，かつ有限ランクである．

定義　βをSの部分集合とする．βによって誘導された右合同関係R_βとは，${}^{\forall}x, y\in S, (x, y)\in R_\beta \Leftrightarrow {}^{\forall}z\in S, {}^{\forall}e\in\mathcal{E}, (e\cdot x\cdot z\in\beta \Leftrightarrow e\cdot y\cdot z\in\beta), x \mathcal{A} y$，かまたは$x, y\in\mathcal{E}, (x\in\beta \Leftrightarrow y\in\beta)$

補題２　R_βはβをrefineする最大の右合同関係である．

定義　R_βをβによって誘導された$\mathcal{A}$に関する右合同関係とする．R_βを法とする商オートマトン$Q(R_\beta)=\langle Q, N, R_\beta[e_1], \mu, F\rangle$はつぎのように定義される．$Q=\{R_\beta[x] \mid x\in S\}$．$N(R_\beta[x], z)=R_\beta[x\cdot z]$; $z\in A$．$\bar{e}\in\mu(R_\beta[x])$; $e\cdot x\in\beta$, $e\in\mathcal{E}$, $x\notin\mathcal{E}$のとき．$F=\{e \mid e\in\beta\cap\mathcal{E}\}$．

定理３　N, μはwell-definedで，$Q(R_\beta)$のbehavior $T(Q(R_\beta))$はβである．

定理４　Sの部分集合βが$(S\cdot)$の上の有限オートマトンのbehaviorであることと，βによって誘導された右合同関

係R_βが有限ランクをもつこととは等価である.

定義 Sの部分集合βが(S・)－正規であるとはβをrefineし, 有限ランクの右合同関係が存在するときそのときをいう.

定理5 Sの部分集合βが(S・)－正規であることと, βが(S・)の上の有限オートマトンのbehaviorであることとは等価である.

定理6 βをSの部分集合とする. つぎの三つの条件は互いに同値である.

(1) βは(S・)－正規である.

(2) βは(S・)の上の有限ランクの合同関係の同値クラスの和集合である.

(3) $\forall x, y \in S$, $x \equiv y \Leftrightarrow \forall u, z \in S$, $(uxz \in \beta \Leftrightarrow uyz \in \beta)$, $x \neq y$, かまたは$x, y \in \epsilon$, $(x \in \beta \Leftrightarrow y \in \beta)$

によって$\equiv$を定義すると, $\equiv$はβをrefineする有限ランクの合同関係である.

以上が, 半群(S・)について一般的に成り立つ性質である. そこで, §2におけるような自由モノイド$(\Sigma^* \cdot)$から帰納的に構成される右モノイド$(\Sigma^* \circ k_{11}/k_{12}, k_{21}/k_{22} \cdots)$について, さらにその性質を詳しく考察し, オートマトン理

論への応用を述べる．

補題7　Lを（$\Sigma^*\cdot$）の上の長さ関数，L_iを（$\Sigma^*\circ k_{11}/k_{12}\cdots k_{i1}/k_{i2}$）の上の長さ関数とする．このとき，$\{x\in\Sigma^* \mid L_i(x)=n\}=\{x\in\Sigma^* \mid nK_1\cdots K_i\leq L(x)<(n+1)K_1\cdots K_i\}$である．ここに，$K_j=k_{j1}+k_{j2}$，（$j=1\sim i$）．

補題8　$x,\ y\in\Sigma^*$，$x\neq y$，$L(x)=L(y)=K_1\cdots K_i$とすると，（$\Sigma^*\circ k_{11}/k_{12}\cdots k_{i1}/k_{i2}$）において，$x\not\sim y$ではない．

定理9　$\Sigma=\{a,\ b\}$とする．（$\Sigma^*\circ k_{11}/k_{12}\cdots k_{i1}/k_{i2}$）－正規であって，（$\Sigma^*\circ k_{11}/k_{12}\cdots k_{i-1\,1}/k_{i-1\,2}$）－正規ではない$\Sigma^*$の部分集合が存在する．（$\beta=\{a^{mk_{11}n_1}b^{mk_{11}n_2}\cdots b^{mk_{11}n_{2^{i-1}}}a^{mk_{12}n_{2^{i-1}+1}}\cdots a^{mk_{12}n_{2^i-1}}b^{mk_{12}n_{2^i}} \mid m\geq 1,\ n_1=n_{2^i},\ n_2=n_{2^i-1},\ \cdots,\ n_{2^{i-1}}=n_{2^{i-1}+1}\}$がそうである．

定理10　$\Sigma=\{a,\ b\}$とする．（$\Sigma^*\circ k_{11}/k_{12}\cdots k_{i1}/k_{i2}$）（$i\geq 2$）－正規集合のクラスはコンテキストフリー言語のクラスと比較不能である．

定理11　（$\Sigma^*\circ k_{11}/k_{12}\cdots k_{i1}/k_{i2}$）－正規集合のクラスは決定性リ＝アバウンデッドオートマトンによって受理される言語のクラスの真の部分クラスである．

補題12　（$\Sigma^*\circ k_{11}/k_{12}\cdots k_{i1}/k_{i2}$）における生成系を

$\mathcal{A}_i \cup \mathcal{E}_i$ とする．x, $y \in \Sigma^*$, $x \widetilde{\mathcal{A}_i} y$ ならば $x \widetilde{\mathcal{A}_{i-1}} y$ である．

補題13　Σ^*の上の関係P_β, R_βをつぎのように定義する．

$\beta \subseteq \Sigma^*$とする．$\forall x$, $y \in \Sigma^*$について，

$(x, y) \in P_\beta \Leftrightarrow \forall u, z \in \Sigma^*, (u \underset{i}{\circ} x \underset{i}{\circ} z \in \beta \Leftrightarrow u \underset{i}{\circ} y \underset{i}{\circ} z \in \beta)$, $x \widetilde{\mathcal{A}_i} y$, かまたは $x, y \in \mathcal{E}_i$, $(x \in \beta \Leftrightarrow y \in \beta)$

$(x, y) \in R_\beta \Leftrightarrow \forall z \in \Sigma^*, \forall e \in \mathcal{E}_{i+1}, (e \underset{i+1}{\circ} x \underset{i+1}{\circ} z \in \beta \Leftrightarrow e \underset{i+1}{\circ} y \circ z \in \beta)$, $x \widetilde{\mathcal{A}_{i+1}} y$, かまたは $x, y \in \mathcal{E}_{i+1}$, $(x \in \beta \Leftrightarrow y \in \beta)$

このとき，P_βが有限ランクならば，R_βも有限ランクである．

定理14　$\Sigma = \{a, b\}$とする．$(\Sigma^* \circ k_{11}/k_{12} \cdots k_{i1}/k_{i2})$－正規集合のクラスは$(\Sigma^* \circ k_{11}/k_{12} \cdots k_{i+1\,1}/k_{i+1\,2})$－正規集合のクラスの真の部分クラスである．

定理15　$\Sigma = \{a, b\}$とする．このとき，

$\mathcal{F}_0 \subsetneqq \mathcal{F}_1 \subsetneqq \mathcal{F}_2 \subsetneqq \cdots$

なる$(\Sigma^* \underset{i}{\circ})$－正規集合のクラス$\mathcal{F}_i$の無限連鎖が存在する．ここに，$\mathcal{F}_0$は$(\Sigma^* \cdot)$－正規集合，すなわち正規集合のクラスである．