数理解析研究所講究録
第123巻 1971年 114-133

言語空間における2つの測度

京大 工 高岡忠雄

1. はじめに

1つの言語に1つの実数を対応させる試みとして，言語のエントロピーが，Benerji (1963)，Kuich (1970) らによって計算されている。一方，言語の複雑さを表すため，そのTuring Machineによる認識時間を数論的関数で表すこと，所謂T(n)-認識可能性の問題がHartmanis & Stearns (1965) らによって論じられている。

本稿では，言語空間から実数空間への写像として2つの測度を定義する。エントロピーは加法性をみたさないが，これらの測度は当然に加法性をみたす。一般に，あるContext-Free言語が正則 (Regular) であるかどうかは決定不可能であるが，これらの測度のいくつかの性質を応用して，いくつかの言語の非正則性を示すことができる。これにより，完全平方数や素数を2進展開して得られた言語の非正則性を示すこ

となるが，完全平方数についてのRitchie (1963) の理論，及び素数の場合のMinsky & Papert (1966) の理論より簡潔な証明が与えられる。 その結果，数論的関数の複雑さと，言語理論的階層とが比較される。

2. 諸定義

Σ を有限集合とし，$|\Sigma| = r$ とする。 Σ^* を，空語 Λ を含み，アルファベット Σ から生成されるすべての語の集合とする。 これを Σ からつくられる自由モノイドともいう。 $R(\Sigma^*)$ を Σ^* の部分集合のすべてからなる集合とする。 Σ^* の濃度は可算，$R(\Sigma^*)$ の濃度は連続である。 $R(\Sigma^*)$ の2つの元に対し，その和集合の演算を "+" で，連鎖 (Concatenation) の演算を "・" または juxtaposition で表すことにより，代数系として半環になる。 また，当然に $R(\Sigma^*)$ は σ-完備ブール束である。 要するに，台集合 $R(\Sigma^*)$ の上に種々の代数構造を定義することができるが，必要に応じて，$R(\Sigma^*)$ の前に代数系の言葉を冠して用いる。 なお半環 $R(\Sigma^*)$ は三根，高岡 (1969) で定義されており，正則集合はこの半環の上の不動点形式の線型方程式の解で与えられることが知られている。

定義1. $\mathcal{A} \subseteq R(\Sigma^*)$ を言語族と呼ぶ。写像 $\mu : \mathcal{A} \to R$ (R：実数集合) が任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対して

$$A \cap B = \phi \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \text{(加法性)} \qquad (1)$$

をみたすとき，μ は言語族 $\mathcal{A}$ に対する測度であるという。

定義2. $A \in R(\Sigma^*)$ に対して数列 $\{p_n(A)\}$ を

$$p_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} N(A, t) r^{-t} \qquad (2)$$

で定義する。ここに，$N(A, t)$ は，A に含まれる長さ t の語の数を表す。数列 $\{p_n(A)\}$ が収束するとき，$p(A)$ を

$$p(A) = \lim_{n \to \infty} p_n(A)$$

で定義する。

定義3. $A \in R(\Sigma^*)$ に対して，数列 $\{\omega_n(A)\}$ を

$$\omega_n(A) = \sum_{t=0}^{n-1} N(A, t) r^{-t} \qquad (3)$$

で定義する。 数列 $\{\omega_n(A)\}$ が収束するとき, $\omega(A)$ を

$$\omega(A) = \lim_{n\to\infty} \omega_n(A)$$

で定義する。

$p(A)$ の存在する A の全体を $\mathcal{A}_p$ で表し, $\omega(A)$ の存在する全体を $\mathcal{A}_\omega$ で表す。 明らかに p, ω は $\mathcal{A}_p$, $\mathcal{A}_\omega$ の上で加法性をみたすので, それぞれ p-測度, ω-測度と呼ぶ。
また, 明らかに,

$$p(\Sigma^*) = 1, \quad 0 \le p(A) \le 1, \quad p(A^c) = 1 - p(A)$$

が成り立つ。 ここに, A^c は A の補集合である。 それ故, p-測度のことを確率測度とも呼ぶ。

補題 1.

$$\left.\begin{aligned} &\forall A \in \mathcal{A}_p \ \ (p(A) > 0 \Rightarrow \omega(A) = \infty) \\ &\forall A \in \mathcal{A}_\omega \ \ (\omega(A) < \infty \Rightarrow p(A) = 0) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

すなわち，$A \in R(\Sigma^*)$ に対して，$p(A)$ と $\omega(A)$ が同時に non-zero finite な値をもつことはできない。（証明略）

定義4．有限オートマトン $S = \langle S, M, a, F \rangle$ は次で定義される1つの代数系である。

S：内部状態の集合で有限集合

Σ：前述のメカアルファベット

a：初期状態

M：写像 $S \times \Sigma \to S$

F：S の部分集合で，最終状態の集合．

有限オートマトン S によって受理される言語 $\beta(S)$ とは，

$$\beta(S) = \{x \in \Sigma^* \mid M(a, x) \in F\}$$

で定義される。$A \in R(\Sigma^*)$ に対して，ある有限オートマトン S が存在して，$A = \beta(S)$ となれば A は正則であるという。正則な言語の族を $\mathcal{R}$ で表す。よく知られているように，$\mathcal{R}$ は集合の演算に関してブール代数を構成する。

$S = \{s_1, \cdots, s_n\}$，$a = s_1$ とし，有限オートマトン S に対して，(n, n)－行列 $Q_\sigma(S)$ を

$$[Q_\sigma(S)]_{ij} = 1, \quad \text{if } M(s_i, \sigma) = s_j \qquad (5)$$
$$= 0, \quad \text{otherwise}$$

で定義し，行列 $Q(S)$ を

$$Q(S) = \sum_{\sigma \in \Sigma} Q_\sigma(S) \qquad (6)$$

で定め，更に行列 $P(S)$ を

$$P(S) = Q(S) \cdot \gamma^{-1} \qquad (7)$$

で定める。 $P(S)$ は確率行列となる。

3. 正則集合族 $\mathcal{R}$ に対する測度

補題2.

$$N(\beta(S), t) = (1, 0, \cdots, 0)[Q(S)]^t \eta_F^T$$

ここに，η_F は $s_i \in F$ であるときのみ i 番目の要素が1であるような横ベクトルである。"T" は転置を示す。ベクトル $(1, 0, \cdots, 0)$ を α で表す。また，

$$p_n(\beta(S)) = \frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1} a[Q(S)]^t \eta_F^T \cdot r^{-t}$$

$$= a\left\{\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}[P(S)]^t\right\}\eta_F^T$$

が成り立つ。

定理 7. $A \in R(\Sigma^*)$ が正則であるとき，$p(A)$ の値が存在し，かつその値は有理数である。

証明. Doob (1952) によれば，Markov Chain の理論より，確率行列 P のべき P^n の Césaro 和

$$\frac{1}{n}(P + \cdots + P^n)$$

は確率行列 P^* に収束し，P^* は方程式

$$P^* P = P^*$$

と，P^* が確率行列であるという条件から求められる。よって，我々の場合

$$p(\beta(S)) = a[P(S)]^* \eta_F^T$$

となり，従ってこの値は有理数である。　　（証明終）

既に述べたように，正則集合族$\mathcal{R}$はブール代数を構成しているから，$\langle \mathcal{R}, p \rangle$はコルモゴロフ（1958）の定義による測度空間を構成することがわかる。　なお，Recursive Setの範囲内で$p(A)$の値が存在しないようなAを見出すことができる。　それ故，p-測度を$\mathcal{R}$からどれ位拡張できるか，例えばContext-Free言語族に対して定義できるか，等，今後の研究課題である。

次後，一般性を失うことなく，有限オートマトンSはConnectedでかつ最小化されているものとする。

定義5.　有限オートマトンSにおいて，$E \subseteq S$がエルゴード集合であるとは，任意の$s, t \in E$に対して

$$(\exists x \in \Sigma\Sigma^* \; M(s, x) = t) \wedge (\exists y \in \Sigma\Sigma^* \; M(t, y) = s)$$

が成り立ち，かつ

$$M(E, \Sigma) = E$$

が成り立つときをいう。 $d \in S$ が dead state であるとは

$$\forall_{x \in \Sigma^*} \; M(d, x) \notin F$$

なるときをいう。 S は最小化されていると考えられるから，高々1個の dead state が存在し，上の条件は

$$\forall_{\sigma \in \Sigma} \; M(d, \sigma) = d \,, \; d \notin F$$

と等価である。 dead state d に対して，$\{d\}$ はエルゴード集合である。どんなエルゴード集合にも属さない state を transient state という。以上，Markov Chain の場合と Parallel につくった定義である。

定理2. $A \in R(\Sigma^*)$ が正則であるとき，$p(A)$ か $\omega(A)$ の中，どちらか一方のみが必ず non-zero finite の値をもつ。

証明. $S_i \in F$ があるエルゴード集合に属していれば，$[p(S)]^*_{ii}$ は non-zero の値をとる。このとき $p(\beta(S)) > 0$ となる。 F に属する状態がすべて transient であるとき，dead state が存在し，

$$\omega_n(\beta(S)) = a \sum_{t=0}^{n-1} [P(S)]^t \eta_F^T$$

が有限確定値 $\omega(\beta(S))$ に収束する。 これらの結果と補題1とを合せて定理が得られる。 (証明終)

定理3. $A \in R$ に対して，$\omega(A)$ が finite な値をもてば，それは有理数である。

証明. 確率行列を $\begin{bmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{bmatrix}$ と書くとき，Q のべき級数は収束し

$$\sum_{t=0}^{\infty} Q^t = (I-Q)^{-1}$$

となることを用いる。 上記の記法については Kemeny & Snell (1960) 参照。 (証明終)

例1. Hopcroft & Ullman (1968) による Half Weight Language

$$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid \text{equal number of } a\text{'s and } b\text{'s occur in } x\}$$

に対して，

$$N(L, 2n) = {}_{2n}C_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} 2^{2n}$$

$$N(L, 2n) \cdot 2^{-2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

これにより

$$N(L, 2n) \cdot 2^{-2n} \to 0 \quad (n \to \infty), \quad p(L) = 0$$

$$\sum_{t=0}^{n-1} N(L, 2t) \cdot 2^{-2t} \to \infty \quad (n \to \infty)$$

よってLは正則ではない。 なお，Lを生成するUnambiguous Context-Free Grammarが存在する。

例2. 素数の2進展開により得られる言語をLで表す。すなわち

$$L = \{10, 11, 101, \cdots\}$$

素数定理により，xを大きな自然数として，0からxまでに

含まれる素数の個数は大体 $x/\log x$ である。 よって、
L に含まれる長さ n の語の個数 $N(L, n)$ は、n が大きいとき、

$$N(L, n) = \frac{2^{n-1}}{n-1} - \frac{2^{n-2}}{n-2}$$

$$= \frac{(n-2)}{(n-1)(n-2)} \cdot 2^{n-2}$$

$$= \frac{1}{n-1} \cdot 2^{n-2}$$

これより、

$$N(L, n) \cdot 2^{-n} \to 0 \quad (n \to \infty), \quad p(L) = 0$$

$$\sum_{t=0}^{n-1} N(L, t) \cdot 2^{-t} \to \infty \quad (n \to \infty), \quad \omega(L) = \infty$$

よって L は正則でない。

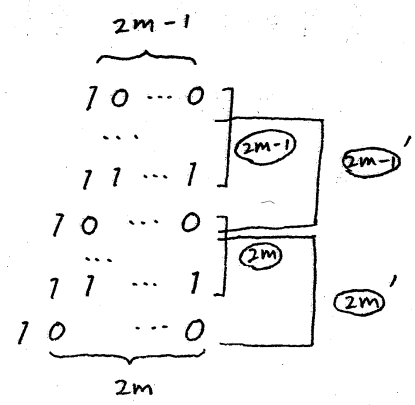
なお、Hartmanis & Shank (1968) によって、この L が non-Context-Free であることまで示されている。

例3. 完全平方数を2進展開して得られた言語を L とする。
即ち、

$$L = \{1, 100, 1001, \cdots\}$$

126

右の図で，(2m) の部分に含まれる完全平方数の個数は (2m)′ の部分に含まれるそれより1個少なく，(2m-1) の部分に含まれる完全平方数の個数は (2m-1)′ の部分に含まれるそれより1個多い。 従って，



$$\omega_{2n}(L) = \sum_{m=1}^{n} \left\{ \left([2^{m-\frac{1}{2}}] - 2^{m-1} + 1 \right) \cdot 2^{-(2m-1)} + \left(2^m - [2^{m-\frac{1}{2}}] - 1 \right) \cdot 2^{-2m} \right\}$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \left\{ [2^{m-\frac{1}{2}}] \cdot 2^{-2m} + 2^{-2m} \right\}$$

$$\omega(L) = \sum_{m=1}^{\infty} [2^{m-\frac{1}{2}}] \cdot 2^{-2m} + \frac{1}{3}$$

ここで [ ] はガウス記号を表し，自然数 n までに含まれる完全平方数の個数は $[\sqrt{n}]$ であることを用いている。 さて，上式中1項は $\sqrt{2}/2$ を2進展開したものを $0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots$ とすると，次の図から理解されるように，$0.\alpha_1 0 \alpha_2 0 \alpha_3 0 \cdots$ となる。

$$
\begin{array}{ll}
m & \\
1 & 0.0\alpha_1 \\
2 & 0.00\alpha_1\alpha_2 \\
3 & 0.000\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\
4 & 0.0000\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \\
5 & 0.00000\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 \\
6 & 0.000000\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6 \\
 & \cdots\cdots \\
+) & \\
\hline
 & 0.\alpha_1 0\alpha_2 0\alpha_3 0\cdots
\end{array}
$$

$0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots$ は Ultimately periodic でないから，$0.\alpha_1 0\alpha_2 0\alpha_3 0\cdots$ も，ultimately periodic ではない。よって，$\omega(L)$ は有理数ではあり得ず，L は正則ではない。

例 4. 再び Half Weight Language L について，収束半径 1 で

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \cdots + \frac{(2n)!}{(n!)^2}2^{-2n}(-x)^n + \cdots$$

と展開できる。言語 L が，c, d を dummy として，アルファベット $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ の上で定義されていると考えると

$$\omega(L) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}4^{-2n}$$

一方

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \cdots + \frac{(2n)!}{(n!)^2} 4^{-2n} + \cdots$$

であるから，

$$\omega(L) = 2/\sqrt{5}$$

これは無理数であり，この方法によっても，L の non-regularity が証明されることがわかった。

3. Context-Free 言語に対する測度

N. Chomsky (1963) によれば Context-Free Grammar の defining equation は半環 $R(\Sigma^*)$ の上の不動点形式の非線型方程式として与えられ，CF 言語はその最小解として与えられる。その方程式を

$$x_i = g_i(x_1, \cdots, x_n) \quad (i = 1, \cdots, n) \qquad (8)$$

とする。与えられた Grammar は Unambiguous とする。上式の関数 g_i の中におかれた各の $\in \Sigma$ を複素変数 z に置き換え，x_i を複素変数 y_i に置き換えて得られる方程式を

$$y_i = M_i(y_1, \cdots, y_n; z) \quad (i = 1, \cdots, n) \qquad (9)$$

と記す。 Kuich によれば, この方程式は $z=0$ のまわりの disk において, unique な analytical solution

$$y_i = f_i(z), \quad f_i(0) = 0 \quad (i = 1, \cdots, n) \qquad (10)$$

をもち,

$$y_1 = \sum_{t=0}^{\infty} N(L, t) z^t \qquad (11)$$

となる。 ここに, x_1 は L をよえる CF Grammar の初期シンボルである。 (11) を Structure generating function という。 (11) 式のべき級数の収束半径は, Cauchy-Hadamard の定理により,

$$\Lambda = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{N(L, n)}$$

とするとき, $1/\Lambda$ でよえられる。 よって, Unambiguous な CF 言語 L に対し, $r > \Lambda$ のとき, $\omega(L)$ は値をもつ。 $\omega(L)$ は方程式

$$y_i = f_i(r^{-1}) \quad (i=1,\cdots,n) \tag{12}$$

を解いて，y_1として得られる。 よって，$w(L)$が値をもつとき，それは代数的な数である。 従って，もし，$w(L)$が値をもって，それが超越数ならば，Lは unambiguous な CF 言語ではないといえる。 なお，$r \geq \Lambda$であるから，Σとして，dummy alphabet を加えても，grammar の ambiguity は不変であるから，適当にΣを大きくすることによって，いつでも$w(L)$が値をもつようにすることができる。

例5. Simple Deterministic Grammar $\{\sigma \to a\sigma\sigma,\ \sigma \to b\}$をよえよう。 定義方程式は

$$\sigma = a\sigma\sigma + b$$

方程式 M_1は

$$y = zy^2 + z$$

$$y = \frac{1-\sqrt{1-4z^2}}{2z}$$

$$N(L, k) = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} \qquad (k = 2n+1)$$

$$= 0 \qquad (\text{otherwise})$$

$$\omega(L) = 1 \quad \text{for } \Sigma = \{a, b\}$$

$$\omega(L) = 2-\sqrt{3} \quad \text{for } \Sigma = \{a, b, c, d\}$$

よって，L は non-regular である。

例 6. 言語 $L = \{a^{n!} \mid n \geq 1\}$ を考えよう。明らかに L は Context-Sensitive である。$\Sigma = \{a, b\}$ のとで，$\omega(L)$ を計算すると，

$$\omega(L) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}$$

これは Liouville Number として知られている超越数である。よって，L は unambiguous CF 言語ではない。

文 献

1. R. Banerji (1963), "Phrase structure languages, finite machines and channel capacity," Information and Control 6.
2. W. Kuich (1970), "On the entropy of context-free languages," Inf. and Cont. 16.
3. J. Hartmanis and R.E. Stearns (1964), "On the computational complexity of algorithms," Trans. Amer. Math. Soc.
4. M. Minsky and S. Papert (1966), "Unrecognizable set of numbers," JACM 13.
5. 三根, 高岡 196), "有限オートマトンの状態特性方程式の一般解について," 信学会誌 52-C.
6. J. L. Doob (1952), Stochastic Processes, John Wiley & Sons, Inc.
7. コルモゴロフ (1962), 関数解析の基礎, 岩波.
8. J. G. Kemeny and J. Snell (1960), Finite Markov Chains, Van Nostran.
9. J. E. Hopcroft and J. D. Ullman (1969), Formal Languages and Their Relation to Automata, Addison-Wesley.

10. N. Chomsky (1963), "Formal properties of grammars," Handbook of Math. Psych., John Wiley & Sons, Inc.

11. J. Hartmanis and H. Shank (1968), "On the recognition of primes by automata," JACM .