数理解析研究所講究録
第123巻 1971年 170-178

非同期回路理論の現状

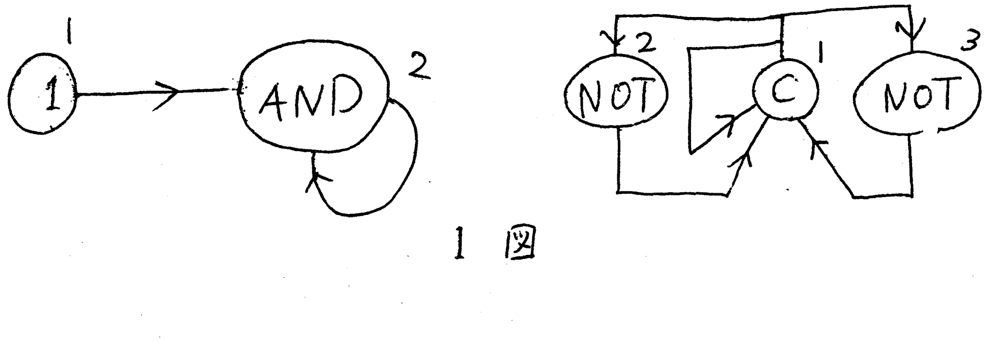
早大 理工　野 口 広

はじめに

非同期回路理論の大要は〔7〕にのべてあるが、そこで今後の発展の方向としてのべた諸点に関し最近著しい発展が〔3〕,〔5〕,〔6〕および〔2〕によってえられている。

ここではこうした発展の意味を直観的に理解できるように、ややinformalなスタイルで非同期回路理論の大略をのべてみる。

<u>ディジタル回路</u>　ディジタル回路は例えば次のように示される回路のことである。



1 図

1. 図で1，2，3の番号を付した○印はそれぞれ以下のx_1', x_2', x_3' のブール関数で与えられ機能を果すノードである。

ブール関数

$$x_1' = 1 \qquad\qquad x_1' = x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3$$

$$x_2' = x_1x_2 \qquad\qquad x_2' = \overline{x_1}, \quad x_3' = \overline{x_1}$$

ただし x_ix_j は積(∧)，x_i+x_j は和(∨)．また $\overline{x_i}$ は x_i の否定を示す。

真値表　ブール関数はその関数表(真値表)を与えれば確定する。上例に対してそれぞれ次の表ができる。

x		x'	
x_1	x_2	x_1'	x_2'
0	0	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	1

x			x'		
x_1	x_2	x_3	x_1'	x_2'	x_3'
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

デジタル・グラフ　これら真値表を用いて回路の状態の関聯は次に定めるデジタル・グラフ G で示される。回路の状態の集合を S とするとき

$G = \{(x, y) \mid x = y$ 或 $x = x'$ あるいは

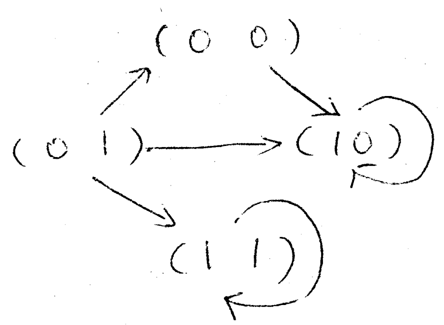
$x \neq x'$ であるときは若干のノードに関して

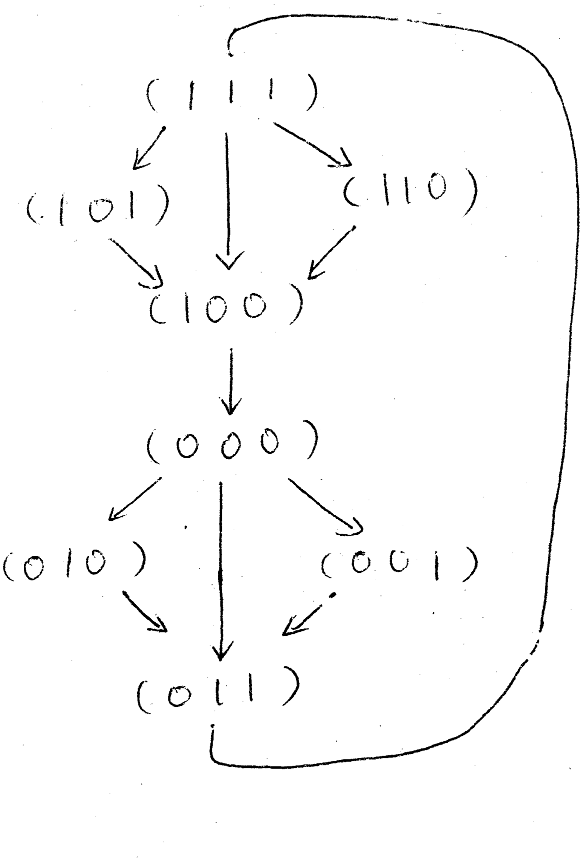
$x_j \neq x_j' = y_j$ であり

他のノードに関しては

$x_j = y_j$

となるすべての y、ただし $x, y \in S\}$





各デジタル・グラフGに対し

$$G' = \{(x, z) \mid x = x(1), x(2), \cdots, x(n) = z$$

となる有限列が存在する。ただし

$$(x(i), x(i+1)) \in G \text{ であるか } x(i) = x(i+1) \}.$$

および

$$G^* = \{(x, y) \mid (x, y) \in G' \text{ and } (y, x) \in G' \}$$

を定める。G^*は同値関数であり、この同値類上にGより induce される底グラフ

$$G_b = G/G^*$$

を定める。勿論自然な準同型写像 $p : G \longrightarrow G_b$ が定まる。

$$(G_1)_b = G_1, \quad (G_2)_b \quad ⦿$$

Speed independency

ディジタル回路＝デジタル・グラフGがその状態uに関して Speed independent であるとは、任意のuより始まるGの状態の$^{*)}$無限列$\{x(i)\}$, $x(0) = u$, $(x(i), x(i+1)) \in G$, よりえられるG_bの状態の列$\{p(x(i))\}$がG_bの1点へ収束することである。

G_1は$(0,1)$に関して Speed independent でない。他の状態に関しては Speed independent である。

G_2は任意の状態に関して Speed independent である。

*) ただしあるnに対して $i \geqq n$ のとき
$x(i)_j = x(i+1)_j = \cdots\cdots$
$x(i)_j' = x(i+1)_j = \cdots\cdots$
であると $x(i)_j = x(i)_j'$ である

セミ・モジュラー回路

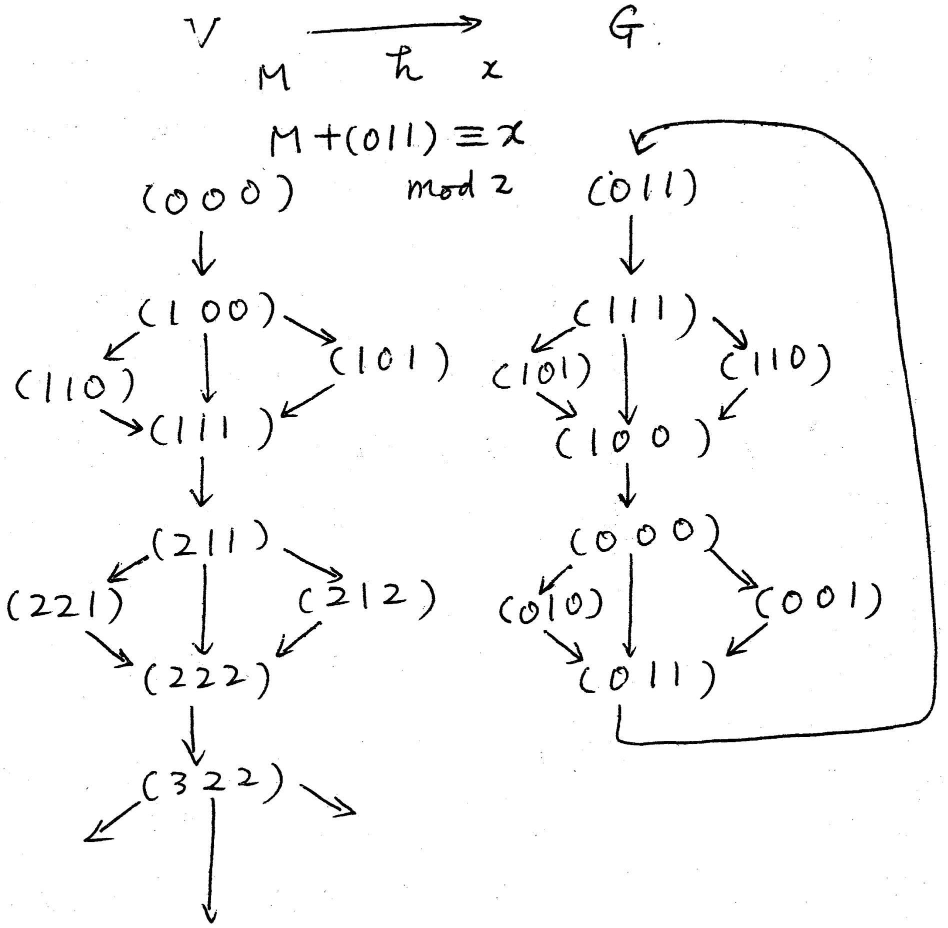
ディジタル回路Gが状態uに関してセミ・モジュラーであるとは、$(u, x) \in G'$ となるすべての状態xに対して $(x, y) \in G \cup \Delta$ ならば $(y, x') \in G \cup \Delta$ となることである。
ただし Δは(x, x)の対の集合を示す。

G_1は$(0,1)$に関して セミ・モジュラーでない

G_2は任意の状態に関して セミ・モジュラーである

uに関してセミ・モジュラーな回路はuに関してSpeed independentであるが逆は勿論成りたたない。しかしSpeed independentな回路の中でセミ・モジュラーな回路が一番(数学的に)自然な形態であろう。

たとえばG_2についてみると2図のように整数回路Vと準同型写像hとが一意に定まる。



2 図

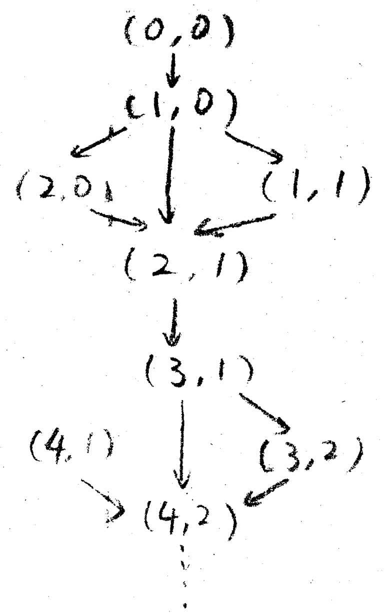
合成定理・連続非同期回路

上記の考察により、回路の状態チャートとよばれる対(V, τ)がセミ・モジュラー回路に対し定まり、(V, τ)は回路動作の時間的経緯を示す。故に逆にある回路を設計するとき、その設計条件が状態チャートであると考えられる。

よって、非同期回路理論における主要課題はどのような対(V, τ)が、実際の回路の状態チャートとなるかを求める合成

手法を求めることである。

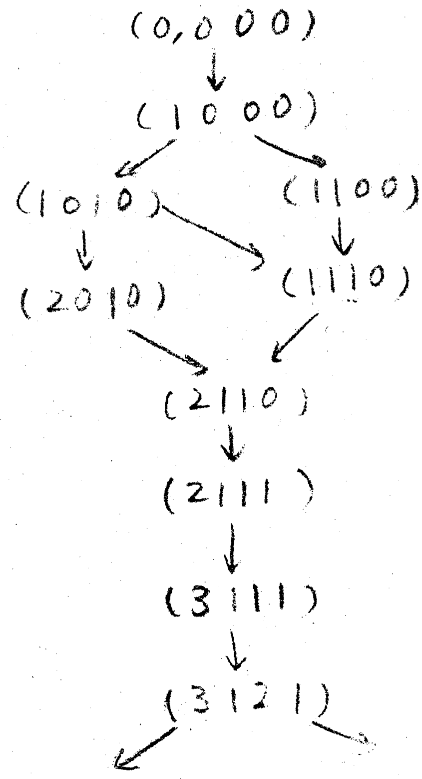
上例の状態チャート$(V, \hbar)$は$\hbar(V)$がディジタル回路であるが、例えば、下図をVとし、



$$\hbar(x, y) = (x \bmod 2,\ y \bmod 2)$$

としてえられる$\hbar(V)$は、ディジタル回路にはならない。そこで問題は、適当にノードを新しく加えて$(V, \hbar)$を拡大し$(V^e, \hbar^e)$をつくり$\hbar^e(V^e)$がディジタル回路になるようにする。これが合成問題である。

この問題はまず[1]で未完全に解かれたが、特に状態チャート$(V, \hbar)$が2進でさらに分配的であるときも[4]で完全に手法が与えられた。すなわちここにのべた状態チャート$(V, \hbar)$に対し、2つの新しいノードを加えて左図のようなV^eをとり



$$\hbar^e(x, y, z, t) = (x \bmod 2,\ y \bmod 2,\ z \bmod 2,\ t \bmod 2)$$

として$(V^e, \hbar^e)$をとると、$\hbar^e(V^e)$は

$$x_1' = \bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_3x_4 + x_2x_3x_4$$

$$x_2' = x_1\bar{x}_4 + x_3\bar{x}_4 + x_2x_3$$

$$x_3' = x_1\bar{x}_4 + x_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3$$

$$x_4' = x_1\bar{x}_3x_4 + x_1x_2x_4 + \bar{x}_1x_2x_3$$

でブール方程式が与えられるデジタル回路を考る。勿論この状態チャート(V^e, δ^e)を初めの2つのノードに制限してみれば元の与えられた状態チャート(V, δ)になっている。(V^e, δ^e)は(V, δ)のデジタル拡大になっている。

この手法は与えられた(V, δ)のVが特に分配的であることを必要としているが、この制限はまず服部[3]によって除かれた。そしてつづいて[5]および[6]で中村が数学的に簡潔にこの合成定理を示したことで一応合成問題は解決された。[本集会の中村氏の発表参照]

また、離散な場合を扱い、非同期回路にいかに連続性を導入するかが長い間の懸案であったが、[12][本集会の木村氏の発表参照]によってそのたくましい第一歩が印された。以下で、非同期回路の基本的概念の定義と結果をのべる。

文献

[1] W. S. Bartky "A theory of Asynchronous Circuits III. Report 96, Univ. of Illinois D. C. L, 1960

[2] I. Kimura "Space-continuous time-semicontinuous theory of speed-independent asynchronous circuits"

[3] M. Hattori "Existence of digital extensions of semi-modular state charts"

[4] M. Hattori, H Noguchi "Synthesis of Asynchronous Circuits, J Math. Soc. Japan 18 (1966) 405-423

[5] T. Nakamura "On the synthesis of Asynchronous Circuits".

[6] T. Nakamura "Synthesis of p-ary semi-modular circuit"

[7] 野口宏 非同期スイッチング理論. 数学 17巻 1号 (1965) 1~13