数理解析研究所講究録
第125巻 1971年 82-86

渦糸の乱れ

農工大教養 高木隆司
東大理 吉沢徹

この講演は，先日やはり数理解析研究所でおこなわれた非線型安定性シンポジウムで発表したものとほぼ同じである．したがって，この報文もそれに伴なう講究録に載せたものと大部分重複することをあらかじめお断りしておく．

完全流体中に1本のほぼ真すぐな渦糸があり，渦糸の所以外は流体中で渦なし流れになっているとする．渦糸はそれ自身が誘導した速度で動き，その形が刻々変っていく．渦糸に沿って取った座標をl，渦糸の形を$\mathbf{x}(l)$で表わすと，渦糸の形の変化は次式で表わされる．

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = A\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial l} \times \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial l^2}$$

ただし掛算はベクトル積である．この方程式の導出については，Batchelor著 An Introduction to Fluid Dynamics, Ch.7 を参照されたい．

渦糸の形が1平面上の正弦波であり，その振幅が波長に比べて微小なときは，その形を不変に保ったまま中心軸のまわりを回ることがわかっている（図1参照）．

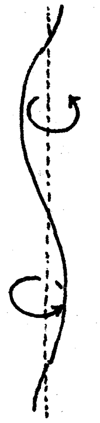

図1.

振幅が有限の大きさを持つときには，渦糸の形が正弦波からくずれていくことが予想される．その機構は，非線形な力を持つ格子の振動に現れる再帰性の問題と関連している．また，層乱から乱流へと遷移するときの機構のひとつのモデルと見ることができ，乱流を生む条件として非線型性だけで充分であるかという疑問とからんでいて，興味が持たれる．

有限振幅の正弦波の変形の様子は解析的に求めることは困難なので，初期条件を与えたあとの発展を数値計算によって調べる．微小振幅の波数 k の正弦波は上述したように中心軸のまわりを回り，その周期は $2\pi/Ak^2$ である．有限振幅のばあいを図2に示す．ただし，長さを正弦波の波長 $2\pi/k$ で，時間を数値計算上の時間のステップで規格化してある．また規格化された A の値すなわち，

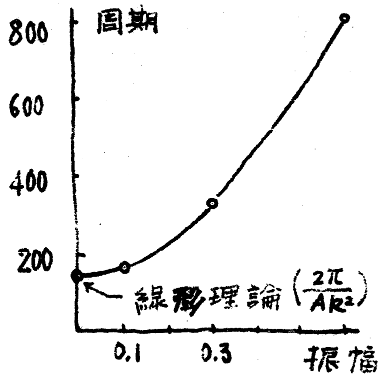

図2

$B = Ak^2\Delta t/4\pi^2$ の値を 10^{-3} にとってある．これは渦糸の強さとも見ることができる量である．周期が振幅の２乗に比例して線形理論からずれているように見えるが，これは単振り子にも見られることである．

正弦波からの形のくずれは，$x(l)$ を l についてフーリエ変換し，各フーリエ成分の時間変化を観察することにより調べることができる． $B=10^{-3}$，振幅が 0.1 のばあいを図3に示す．ただし，１波長を 24 等分し渦糸上の格子点の運動を追っていった結果である．中心軸の方向を z 方向とし，$x(l)$，$y(l)$ のフーリエ成分の２乗の和の平方根を縦軸にとってある．振幅の変化は非常に規則的であり，数値計算を行った $t=450$ まで同じような様子が続いた．２倍高調波が現れないのはこの系の性質に依ることで，自明であることがわかる．振幅 0.1 のばあいは基底波のひとまわりする周期は 183 であるが，それよりずっと

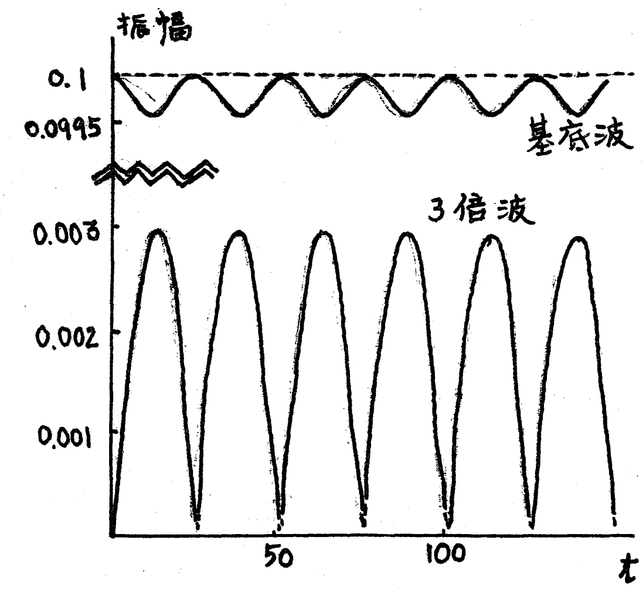

図3

小さい周期で振幅の変化が起こり，周期約 [illegible]5 で再帰をくりかえしていることがわかる.

基底波の振幅が 0.3 のばあいを図4に示す.

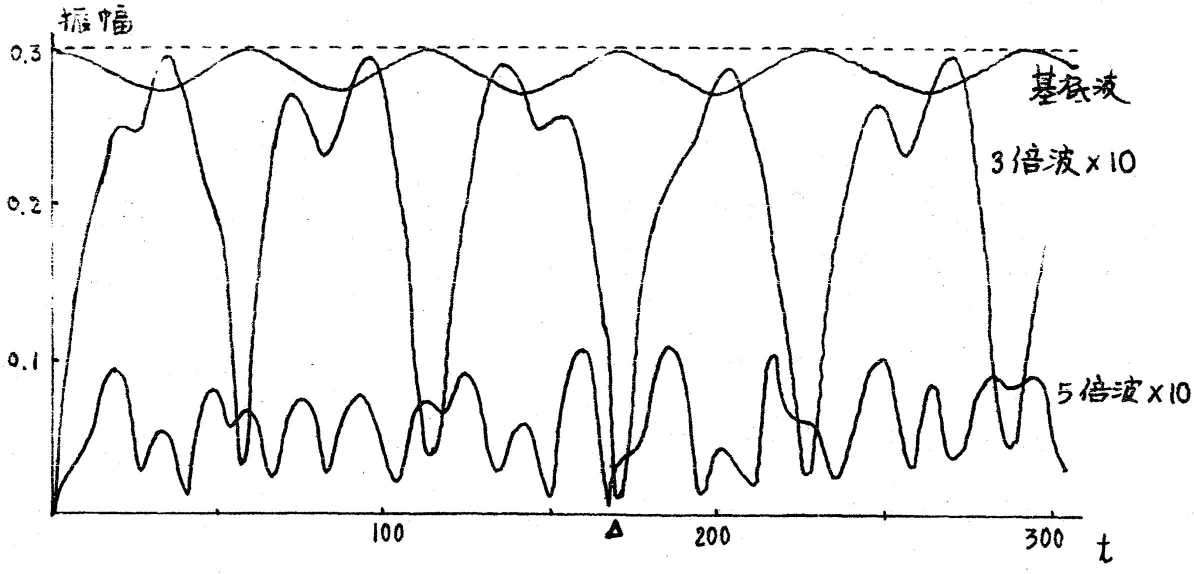

図4

このばあいは振幅 0.1 のときに比べて規則性が少ない. また5倍波がかなり大きくなっている. しかし，$t \cong 170$ で3倍波,5倍波がともに小さくなっていて再帰したと見ることができる. ただ，3倍波と5倍波の極小点がわずかにずれていて，再帰は完全ではない. 2度目の再帰は $t \cong 340$ で起こるが，このとき3倍波と5倍波のずれが増大している. 3度目は $t \cong 410$ ，4度目は 570 である. $t > 570$ での変化の様子と $t > 0$ での様子とは非常によく似ている. この意味で，$t \cong 570$ でより強く再帰したと考えることができる. 数値計算は $t =$

1200まで行ったが，それまでの再帰の様子を直線上に表わそう．▽は弱い再帰，▼は強い再帰を表わす．

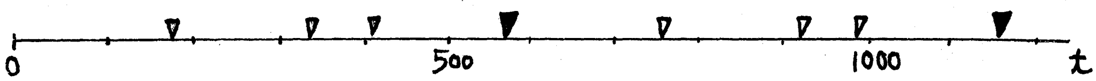

図5

以上より，渦糸の変形はかなり安定な周期性を持ち，乱雑にならないことがわかる．ただし，振幅が増すと規則性が弱くなる．渦糸の変形の規則性を破るものは非線型性ではなく，他の要素，あるいはその要素と非線型性との結合であることが予想される．そのような要素として，筆者は非一様性（空間的，あるいは時間的な）を考慮している．これは将来の課題である．