数理解析研究所講究録
第127巻 1971年 35-42

Homotopy spheres 上の Z_r-action について

東大 大学院 松江 広文

§1、序

homotopy $(n+2)$-sphere Σ^{n+2} 上の smooth semi free Z_r-action (但し、Z_r は order r の cyclic gp.) で fixed pt. set として homotopy n-sphere Σ^n を持つもので、Σ^n が Σ^{n+2} の中で knot しているものを construct する。

Giffen [2], Su [4], Tamura [5], により既に上記の action は construct されているが彼らとは別の方法で construct する。

§2、主定理とその応用

$a_i \geq 2$ を integer として、複素 $(n+2)$-変数の polynomial を

$$f(z_1, \cdots, z_{n+2}) = (z_1)^{a_1} + \cdots + (z_{n+2})^{a_{n+2}}$$

とする。

$$S^{2n+3} \overset{\text{def}}{\equiv} \{(z_1, \cdots, z_{n+2}) \in \mathbb{C}^{n+2} \mid z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_{n+2}\overline{z_{n+2}} = 1\}$$

Brieskorn manifold $f^{-1}(0) \cap S^{2n+3}$ を K^{2n+1} と書く。

$$K^{2n-1} \overset{\text{def}}{\equiv} K^{2n+1} \cap \{z_{n+2} = 0\}$$

すると次の定理が云える。

〈Theorem A〉 $n \geqq 2$ とする時

$$\pi_n(K^{2n+1} - K^{2n-1}) = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$$

$((a_1 - 1) \cdots (a_{n+1} - 1)$ コの $\mathbb{Z}$ の直和$)$

この定理の応用として序で述べたactionが次のようにconstructされる。

$r \geqq 2$ を任意のinteger，$p, q \geqq 3$ をodd integerで次の条件(*)を満たすものとする。

条件(*) 最大公約数 $(p, q) = (p, r) = (q, r) = 1$

$$f(z) = z_1^2 + \cdots + z_{n-1}^2 + z_n^p + z_{n+1}^q + z_{n+2}^r$$

$n \geqq 3$ とした時 Brieskorn [1] より次の2つのBrieskorn manif. $f^{-1}(0) \cap S^{2n+3}$, $f^{-1}(0) \cap S^{2n+3} \cap \{z_{n+2} = 0\}$ はhomotopy sphere。

$$\left.\begin{array}{l} f^{-1}(0) \cap S^{2n+3} = \Sigma^{2n+1}_{(p,q,r)} \\ \Sigma^{2n+1}_{(p,q,r)} \cap \{ z_{n+2} = 0 \} = \Sigma^{2n-1}_{(p,q)} \end{array}\right\}$$ と書く。

<Theorem A> より

$$\pi_n \left(\Sigma^{2n+1}_{(p,q,r)} - \Sigma^{2n-1}_{(p,q)} \right) = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$$

($(p-1)(q-1)$ コの直和)。

故に $\left(\Sigma^{2n+1}_{(p,q,r)} , \Sigma^{2n-1}_{(p,q)} \right)$ は homotopy spheres の smooth knot.

$\alpha : \Sigma^{2n+1}_{(p,q,r)} \circlearrowleft$ を

$$\alpha(z_1, \cdots, z_{n+1}, z_{n+2}) \overset{def}{=} (z_1, \cdots, z_{n+1}, \varepsilon z_{n+2})$$

と定義する。但し $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{r}}$.

α によって $\Sigma^{2n-1}_{(p,q)}$ を fixed pt. set とする $\Sigma^{2n+1}_{(p,q,r)}$ 上の smooth semi free Z_r-action が construct される。

各 $r \geqq 2$ に対し(条件(*))を満たし $(p-1)(q-1)$ が異なるいろいろな odd integer $p, q \geqq 3$ をとることにより次の事が云える。

> **<Theorem B>** knotted fixed pt. set Σ^{2n-1} をもつ, Σ^{2n+1} 上の smooth semi free Z_r-action で無限個異なる (topological にも) ものが存在する。但し $n \geqq 3$, $r \geqq 2$.

§3. <Theorem A>の証明

$f(z_1, \cdots, z_{n+2}) = (z_1)^{a_1} + \cdots + (z_{n+2})^{a_{n+2}}$ に対し

$\tilde{f}(z_1, \cdots, z_{n+1}) \overset{def}{=} f(z_1, \cdots, z_{n+1}, 0)$ とする。

$S^{2n+1} = S^{2n+3} \cap \{ z_{n+2} = 0 \}$ とすると

$\tilde{f}^{-1}(0) \cap S^{2n+1} = K^{2n-1}$

Milnor [3] の smooth fibering

$$\phi : S^{2n+1} - K^{2n-1} \longrightarrow S^1$$

$$\phi : \underset{z}{\rotatebox{90}{$\in$}} \longmapsto \tilde{f}(z) / |\tilde{f}(z)|$$

に対し、$S^1 \ni e^{i\theta}$ 上の fiber を F_θ とおく。

$W^{2n} \overset{def}{=} K^{2n+1} \cap \{ \mathrm{Im}\, z_{n+2} = 0 , \mathrm{Re}\, z_{n+2} > 0 \}$

<Lemma. 1.>

W^{2n} と $F_\pi \, (= \phi^{-1}(-1))$ は homeomorphic

(証明)

$h : F_\pi \longrightarrow W^{2n}$ を次のように定義する。

$F_\pi \ni (z_1, z_2, \cdots, z_{n+1}) = z$

$h(z_1, z_2, \cdots, z_{n+1})$

$$\overset{def}{=} \left(t^{\frac{1}{a_1}} z_1 , t^{\frac{1}{a_2}} z_2 , \cdots , t^{\frac{1}{a_{n+1}}} z_{n+1} , t^{\frac{1}{a_{n+2}}} |\tilde{f}(z)|^{\frac{1}{a_{n+2}}} \right)$$

ただし $\mathbb{R} \ni t > 0$ は次の方程式を解いた値。

$$|z_1|^2 t^{\frac{2}{a_1}} + |z_2|^2 t^{\frac{2}{a_2}} + \cdots + |z_{n+1}|^2 t^{\frac{2}{a_{n+1}}} + |\tilde{f}(z)|^{\frac{2}{a_{n+2}}} t^{\frac{1}{a_{n+2}}} = 1 ,$$

$t > 0$ なる値をとることにしてあるので、

t は $F_\pi \ni z$ を fix すると unique にきまる。

又 $\left.\begin{array}{ccc} F_\pi & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ z & \longmapsto & t \end{array}\right\}$ なる map は continuous map.

故に h は continuous map.

$\bar{h}: W^{2n} \to F_\pi$ を次のように定義する。

$W^{2n} \ni (z_1, z_2, \cdots, z_{n+1}, x_{n+2})$, $\mathbb{R} \ni x_{n+2} > 0$

$\bar{h}(z_1, z_2, \cdots, z_{n+1}, x_{n+2})$

$\overset{\text{def}}{\equiv} (s^{\frac{1}{a_1}} z_1, s^{\frac{1}{a_2}} z_2, \cdots, s^{\frac{1}{a_{n+1}}} z_{n+1})$

ただし $\mathbb{R} \ni s > 0$ は次の方程式を解いた値。

$$|z_1|^2 s^{\frac{2}{a_1}} + |z_2|^2 s^{\frac{2}{a_2}} + \cdots + |z_{n+1}|^2 s^{\frac{2}{a_{n+1}}} = 1.$$

h と $\bar{h}$ の定義より、$h\bar{h} = id$, $\bar{h}h = id$

が云える。故に W^{2n} と F_π は homeomorphic.

q.e.d.

$$\boxed{\begin{array}{l}\langle\text{Lemma. 2.}\rangle \quad \psi: \begin{array}{ccc} K^{2n+1} - K^{2n-1} & \longrightarrow & S^1 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (z_1, \cdots, z_{n+2}) & \longmapsto & z_{n+2}/|z_{n+2}| \end{array} \\ \text{なる map は smooth fibering}\end{array}}$$

(証明)

$$p: \begin{array}{ccc} K^{2n+1} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (z_1, \cdots, z_{n+2}) & \longmapsto & z_{n+2} \end{array}$$

なる smooth map p に対し、$\mathbb{C} \ni \{0\}$ は

p の regular value.

$\mathbb{R} \ni \varepsilon > 0$: 十分小 に対し、

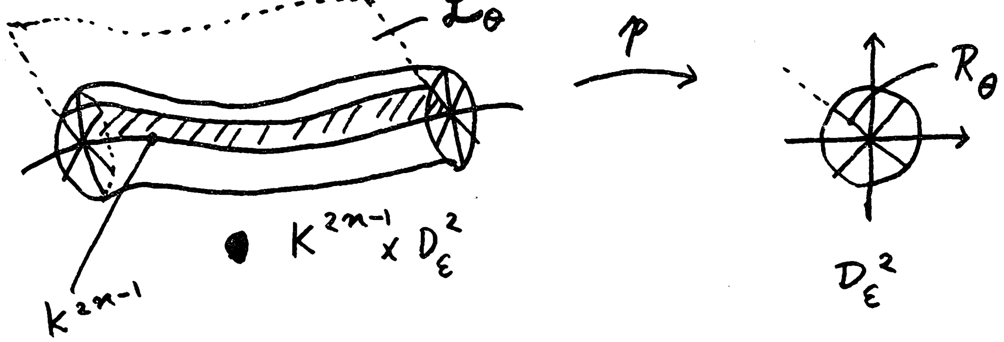
$D_\varepsilon^2 \overset{def}{=} \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqq \varepsilon \}$

$p^{-1}(0) = K^{2n-1}$ 故 $p^{-1}(D_\varepsilon^2)$ は $K^{2n+1} \supset K^{2n-1}$

の tub. nbhd. $K^{2n-1} \times D_\varepsilon^2$ である。

$\psi \mid (K^{2n+1} - K^{2n-1} \times \mathring{D}_\varepsilon^2) : K^{2n+1} - K^{2n-1} \times \mathring{D}_\varepsilon^2 \to S^1$

は onto submersion 故 smooth fibering.



$$\left.\begin{aligned} R_\theta &= \{ re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 < r \leqq \varepsilon \} \\ \mathcal{L}_\theta &= \psi^{-1}(e^{i\theta}) \end{aligned}\right\} \text{とおく.(上図)}$$

$\mathcal{L}_\theta \cap K^{2n-1} \times D_\varepsilon^2 = p^{-1}(R_\theta)$

故に $\psi : K^{2n+1} - K^{2n-1} \to S^1$

は各 $e^{i\theta} \in S^1$ に対し $\mathcal{L}_\theta$ を fiber とする smooth fibering.

q.e.d.

(<Theorem A> の証明.)

Lemma 2 の ψ の定義と W^{2n} の定義より

$W^{2n} = \psi^{-1}(1) \ (= \mathcal{L}_0)$

故に $K^{2n+1} - K^{2n-1} = E$ とおくと次の exact sequence が fibering ψ より云える.

$$\pi_{n+1}(S^1) \to \pi_n(W^{2n}) \to \pi_n(E) \to \pi_n(S^1)$$

$n \geqq 2$ 故 $\pi_n(W^{2n}) \approx \pi_n(E)$

ところが Lemma 1 より W^{2n} は smooth fibering $\phi: S^{2n+1} - K^{2n-1} \to S^1$ の一つの fiber F_π $(=\phi^{-1}(-1))$ に homeomorphic.

Milnor [3] により F_π は $(a_1-1)(a_2-1)\cdots(a_{n+1}-1)$ 個の S^n の bouquet $S^n \vee \cdots \vee S^n$ の homotopy type を持つ。

故に $\pi_n(E) = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$

$((a_1-1)(a_2-1)\cdots(a_{n+1}-1)$ 個の $\mathbb{Z}$ の直和$)$.

q.e.d.

Remark.

<Theorem A> は 加藤さん達から云われた "$K^{2n+1} - K^{2n-1}$ は $S^{2n+1} - K^{2n-1}$ 上の a_{n+2}-fold covering space になっている" と云う事からも云える。

------ references ------

[1]. E. Brieskorn,

Inventions Math. 2, pp. 1–14 (1966)

[2] C. H. Giffen,
Amer. J. of Math 88, pp. 187-198 (1966)
[3] J. Milnor, "Singular pts of complex hypersurfaces"
[4] J. C. Su,
Proc. of the Conf. on Transf gr. pp. 193-204
[5] I. Tamura,
J. of the Fac. of Sci. univ. of Tokyo
Sect. 1. Vol. 16, pp. 101 - 114 (1969-1970)