数理解析研究所講究録
第 127 巻 1971 年 43-47

BROWDER－LIVESAY INVARIANTの拡張について

東大 理 松元重則

§1. 序ならびに定義

Browder－Livesayは、球面上のfree involutionのdesuspensionの問題を、あるinvariantを考える事によって解決した。Santiago Lopéz de Medranoは、彼のTheseにて、上の結果のbest possibleである事を示した。

ここでは、彼等の結果を球面上のfree involutionから、一般のcompact多様体（simply－connected or not）に拡張する。

Yを、connected closed manifoldとし、nで、その次元を表わす。w. $\pi_1(Y) \to \{\pm\}$を、1次元Stiefel－Whitney類とする。Yの基本類を、$[Y] \in H_n^{w}(Y, \mathbb{Z})$で表示する。（$H_n^{w}(Y, \ )$に関しては、Wall "Surgery of compact mfds" をみよ。）

Sを、Y上の与えられたfree $\mathbb{Z}_2$-actionとし、

次を、終始、仮定する。

[仮定] Yの base point y_0 と Sy_0 を結ぶ path (の homotopy class) l が一つ与えられていて、
$S l \circ l = 1 \in \pi_1(Y, y_0)$ である。

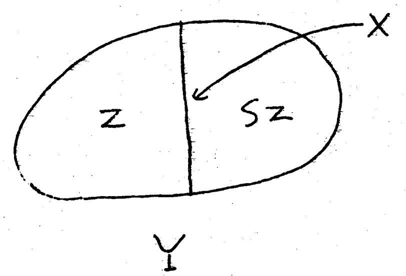
この時、lを用いる事によって、define された
$S_\# : \pi_1(Y) \to \pi_1(Y)$ は、involution である。

次に、(S, Y) の signature $\varepsilon(S, Y)$ を
$$\varepsilon(S, Y) = \pm \iff S_*[Y] = \pm [Y]$$ (複号同順) にて define する。ここに、$S_* : H_n^+(Y; \mathbb{Z}) \to H_n^+(Y; \mathbb{Z})$ である。

(例) YとしてS^nをとり、involution として standard なものをとれば、$\varepsilon(S, Y) = (-1)^{n-1}$ である。

さて、(S, Y)に対し、我々は、triple (T, N, ϕ) を考える。ここに、Nは n-dim. closed manifold で Tは、その上の free involution である。ϕは Nから Yへの simple homotopy equivalence で、$\phi T x = S \phi x$ $(\forall x \in N)$ を満足するものとする。

次に X^{n-1} を、(S, Y) の characteristic submfd. とせよ。すなわち、ある ~~__~~ compact submanifold Z^n of Y が存在して、$\partial Z = X$ かつ $Z \cup SZ = Y$, $Z \cap SZ = X$ とする。(次図参照)



[定義] $\phi : (T, N) \to (S, Y)$ が s-regular on X とは、

1) ϕ は differentiable 又は PL map (我々の偏っている category によって) かつ transverse regular on X

2) $\phi | \phi^{-1}(X) : \phi^{-1}(X) \to X$ は、simple h.e. であるとする。

(注意) $\phi^{-1}(X)$ は、(T, N) の characteristic submfd である。

我々は $\phi : (T, N) \to (S, Y)$ を equivariant ($\mathbb{Z}_2$-action に関して) homotopy で動かし、s-regular on X となさしめ得るか否かという問題を考える。

§.2 結果

我々は、上の問題を、次の補足的仮定のもとで考える。

[補足的仮定] Yの次元$(=n)$を6以上であるとし、characteristic submfd. Xは、連結 かつ、$\pi_2(Z, X) = \pi_1(Z, X) = 0$ を満足するとする。ここに、Zとは、Xを bound するYの submanifold であった。

我々の結果は、次の通りである。

[定理] finitely presented group πと、homomorphism $w: \pi \to \{\pm\}$と、πの involution δと、符号ε(+か−)と、自然数nとによって定まる abelian 群

$$BL_n(\pi, w; \delta, \varepsilon)$$

が define される。そして、simple h.e. ($\mathbb{Z}_2$-equivariant) $\phi: (T, N) \longrightarrow (S, Y)$ の $\mathbb{Z}_2$-equivariant homotopy class にのみよって定まる invariant

$$\sigma(\phi) \in BL_n(\pi_1(Y), w; S_\#, \varepsilon(S, Y))$$

が define される。そして $\sigma(\phi) = 0$ は、次と同値である。

上の[補足的仮定]を満たす任意の characteristic submanifold Xに対し、ϕは、その $\mathbb{Z}_2$-equivariant homotopy class 内に、Xに s-regular なるものを含む。

上で定義した obstruction group $BL_n(\cdots)$ が大きすぎないことは、次によって知られている。

[定理2]　σ を $BL_{n+1}(\pi_1(Y), w; S_\#, \epsilon(S,Y))$ の任意の元とする時、compact mfd triad

$$(Y\times I,\ Y\times\{0\},\ Y\times\{1\})$$

~~##~~、と、その上の free involution T 並びに equivariant simple h.e. (of triads)

$$\Phi : (Y\times I,\ Y\times\{0\},\ Y\times\{1\}) \longrightarrow (自分自身)$$

が存在して、$\sigma(\Phi) = \Phi$ である。

(注意.1)　我々は、invariant σ を、closed mfd の場合にしか定義しなかったが、[定理.1] は、容易に、boundary つきの多様体の ~~fixed~~ boundary を fix した case に、拡張される。上の[定理.2] は、この拡張に関してである。

(注意.2)　[定理.1] は $\dim Y \geqq 6$ の場合に成立した。しかし、[定理.2] は $\dim(Y\times I) = 6$ の場合は、だめ。