数理解析研究所講究録
第 131 巻 1971 年 1-10

$U^*(\ ;Z_q)$ 理論の admissible 積 について

阪市大. 工. 鎌田正良

§1. admissible 積

generalized cohomology theory $\tilde{h}$ が積

$$\mu : \tilde{h}^i(X)\otimes\tilde{h}^j(Y) \longrightarrow \tilde{h}^{i+j}(X\wedge Y)$$

をもつとする. $M_q = S^1 \cup_q e^2$ で $(Z_q, 2)$ 型の co-Moore 空間を表わすとき,

$$\tilde{h}^j(X;Z_q) = \tilde{h}^{j+2}(X\wedge M_q)$$

と置くことによって, $\tilde{h}(\ ;Z_q)$ は generalized cohomology theory になるが, Araki-Toda [1] によって, $\tilde{h}(\ ;Z_q)$ 理論における admissible 積が研究され, 次の結果が得られた.

定理 A ([1], I) $\tilde{h}$ の積が associative とする. $q\not\equiv 2 \pmod 4$ の時は, 常に admissible 積が $\tilde{h}(\ ;Z_q)$ に存在する. $q\equiv 2 \pmod 4$ の時は, $\tilde{h}$ の積が associative で commutative, ($\mu(x\otimes y) = (-1)^{\deg x\cdot\deg y}\mu(y\otimes x)$), であって, Hopf map

$\eta: S^3 \longrightarrow S^2$ より誘導される作用 $\eta^{**}: \tilde{h}^i(\cdot \wedge S^2) \longrightarrow \tilde{h}^i(\cdot \wedge S^3)$ が常に零ならば，admissible 積が $\tilde{h}(\ ;Z_q)$ に存在する．

$\tilde{h}(\ ;Z_q)$ 理論における admissible 積 $\mu_q: \tilde{h}^i(X;Z_q) \otimes \tilde{h}^j(Y;Z_q) \longrightarrow \tilde{h}^{i+j}(X \wedge Y;Z_q)$ が $\mu_q(x \otimes y) = (-1)^{\deg x \deg y} \mu_q(y \otimes x)$ を満たす時，μ_q は可換であると定義する．

定理B（[1],II）$\tilde{h}$ の積が associative, commutative とする．$q \equiv 0 \pmod 4$ で $(\eta^2\pi)^{**}=0$ ならば，$\tilde{h}(\ ;Z_q)$ に可換な admissible 積が存在する．但し，$\pi: M_q \longrightarrow S^2$ は projection である．q が奇数ならば，常に可換な admissible 積は存在する．

$\bar{\eta} \in [S^2M_2, S^2] \cong \{S^2M_2, S^2\}$ を $\bar{\eta} \circ i: S^3 \subset S^2M_2 \longrightarrow S^2$ が Hopf map で表わされるような元とする．$\bar{\eta}$ によって次の写像を得る

$$\bar{\eta}^*: \tilde{h}^0(S^0) \approx \tilde{h}^2(S^2) \longrightarrow \tilde{h}^2(S^2M_2) \approx \tilde{h}^0(M_2)$$

定理C（[1],II）$\tilde{h}$ の積が associative commutative とし，$\eta^{**}=0$ とする．$q \equiv 2 \pmod 4$ の時，$\tilde{h}(\ ;Z_q)$ に可換な admissible 積が存在する為の必要十分条件は $\bar{\eta}^*(1)=0$ である．

$\tilde{U}^*(\cdot)$-理論[3]について上の定理を調べることにする．我

々は以後，基点をもつ有限CW-複体の圏で考える．任意の有限CW-複体Xに対し，次の図式は可換である．

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{U}^k(X\wedge S^2) & \xrightarrow{\eta^{**}} & \tilde{U}^k(X\wedge S^3) \\
\mu\uparrow\cong & & \uparrow\mu \\
\tilde{U}^{k-2}(X)\underset{U^*}{\otimes}\tilde{U}^2(S^2) & \xrightarrow{1\otimes\eta^*} & \tilde{U}^{k-2}(X)\underset{U^*}{\otimes}\tilde{U}^2(S^3)
\end{array}$$

$\tilde{U}^2(S^3)=0$ であるから $\eta^{**}=0$．また $(\eta^2\pi)^{**}=0$ である．従って定理A,Bより直接次の結果を得る．

定理 1.1　$\tilde{U}^*(\ ;Z_q)$理論においては常にadmissible積が存在する．さらに，$q\not\equiv 2\ (mod 4)$ の時は可換なadmissible積が存在する．

以下で，$q\equiv 2\ (mod 4)$ の場合を調べる．定理Cで扱われる元$\bar{\eta}$を表わす写像 $f: S^4M_2\longrightarrow S^4$ を考える．明らかに f は次の可換な図式の意味で$\bar{\eta}^*$を誘導する．

(1.1)
$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{U}^0(S^0) & \xrightarrow{\bar{\eta}^*} & \tilde{U}^0(M_2) & & \\
\wr\| & & \wr\| & & \\
\tilde{U}^4(S^4) & \xrightarrow{f^*} & \tilde{U}^4(S^4M_2) & \overset{S_*}{\approx} & \tilde{U}^5(S^5M_2)
\end{array}$$

一方 f の写像錐を $L=S^4\cup C(S^4M_2)$ とすると，cofibration

$$S^4\longrightarrow L\longrightarrow S^5M_2$$

に対するexact列より次のexact列

$$\tilde{U}^4(S^4) \xrightarrow{S_*\circ f^*} \tilde{U}^5(S^5M_2) \longrightarrow \tilde{U}^5(L)$$

が存在する．Lについてcohomology群の構造は

$$(1.2) \qquad \tilde{H}^k(L) = \begin{cases} Z & k=4 \\ Z_2 & k=7 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で，$Sq^3\circ\rho_2 : \tilde{H}^4(L) \to \tilde{H}^4(L;Z_2) \to \tilde{H}^7(L;Z_2)$ は non-trivial である．ρ_2 は reduction homomorphism．（[1], 6.3）．

定理 1.2　有限CW複体Xに対して，$\tilde{U}^*(X)$ のスペクトル系列を $\{E_r^{p,q}\}$，$E_2^{p,q} \cong \tilde{H}^p(X, U^q)$，とする．この時，同型

$$\tilde{\mu} : E_3^{p,q} \cong \tilde{H}^p(X; U^q)$$

が存在し，次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
E_3^{p,0} \arrow[r, "d_3^{p,0}"] \arrow[d, "\tilde{\mu}", "\cong"'] & E_3^{p+3,-2} \arrow[d, "\tilde{\mu}", "\cong"'] \\
\tilde{H}^p(X) \arrow[d, "\rho_2"] & \tilde{H}^{p+3}(X)\otimes U^{-2} \\
\tilde{H}^p(X;Z_2) \arrow[r, "Sq^2 \otimes [CP(1)]"] & \tilde{H}^{p+2}(X;Z_2)\otimes U^{-2} \arrow[u, "\beta_2\otimes id"']
\end{tikzcd}$$

但し，β_2 は Bockstein homomorphism．

証明は§3で与えられる．

補題 1.3．　$\tilde{U}^5(L) \cong 0$

証明　$\tilde{U}^5(L)$ の filtration $\{J^{p,q}\}$，$J^{p,q}/J^{p+1,q-1}\cong E_\infty^{p,q}$，を考える.

$$\tilde{U}^5(L)\cong J^{0,5}\cong\cdots\cong J^{7,-2}\ ,$$

$J^{7,-2}/J^{8,-3}\cong E_\infty^{7,-2}$ で $J^{8,-3}\cong 0$ である．$U^{odd}\cong 0$ と（1.2）より，

$$E_\infty^{7,-2}\cong\cdots\cong E_4^{7,-2}$$

一方，定理 1.2 と $Sq^3\circ\rho_2|\tilde{H}^4(L)$ が non-trivial であることから，$d_3^{4,0}:E_3^{4,0}\cong Z\longrightarrow E_3^{7,-2}\cong Z_2$ は non-trivial である．$d_3^{7,-2}$ は零写像であるから，$E_4^{7,-2}\cong 0$.

図式（1.1）で，$\tilde{U}^0(S^0)\cong Z$，$\tilde{U}^0(M_2)\cong Z_2$ に注意すると，補題 1.3 より $\tilde{\tau}^*(1)\neq 0$ 従って定理Cより直ちに次の結果を得る。

定理 1.4　$q\equiv 2\pmod 4$ の時，$\tilde{U}^*(\ ;Z_q)$ には可換な admissible 積は存在しない．

§2.　$\tilde{U}^{p+1}(X^{p+3},X^{p+2})$ の元.

有限CW複体Xに対して，$\tilde{U}^*(X)$ のスペクトル系列 $\{E_r^{p,q}\}$ は，$E_r^{p,q}=Z_r^{p,q}/B_r^{p,q}$,

$$Z_r^{p,q}=\mathrm{Im}\{\tilde{U}^{p+q}(X^{p+r-1}/X^{p-1})\xrightarrow{j^*}\tilde{U}^{p+q}(X^p/X^{p-1})\}$$

$$B_r^{p,q}=\mathrm{Im}\{\tilde{U}^{p+q-1}(X^{p-1}/X^{p-r})\xrightarrow{\delta}\tilde{U}^{p+q}(X^p/X^{p-1})\}$$

で，与えられる．differential $d_r^{p,q}$ は定義より［2］，

$$d_r^{p,q}\{j^*(x)\}=\{\delta(x)\}\ ,$$

但し，$j^*: \tilde{U}^{p+q}(X^{p+r-1}/X^{p-1}) \longrightarrow \tilde{U}^{p+q}(X^p/X^{p-1})$，$\delta: \tilde{U}^{p+q}(X^{p+r-1}/X^{p-1}) \longrightarrow \tilde{U}^{p+q+1}(X^{p+r}/X^{p+r-1})$，であることが解る．一方，同型

$$\tilde{\mu}: E_3^{p,q} = \mathrm{Im}\{\tilde{U}^{p+q}(X^{p+2}/X^{p-1}) \xrightarrow{j^*} \tilde{U}^{p+q}(X^p/X^{p-1})\}/\mathrm{Im}\{\tilde{U}^{p+q-1}(X^{p-1}/X^{p-3}) \longrightarrow \tilde{U}^{p+q}(X^p/X^{p-1})\}$$
$$\longrightarrow \tilde{H}^p(X; U^q)$$

は次のように与えられる．先ず同型

$$\mu_0: \tilde{U}^{p+q}(S^p) \longrightarrow \tilde{H}^p(S^p)\otimes U^q$$

は，$x\in \tilde{U}^{p+q}(S^p)$ に対し，$\mu_0(x) = e^p \otimes S_*^{-p}(x)$（$S_*^{-p}$ は懸垂同型で e^p は $\tilde{H}^p(S^p)$ の生成元）で与えられる．これは次の同型

$$\mu_0: \tilde{U}^{p+q}(X^p/X^{p-1}) \longrightarrow \tilde{H}^p(X^p/X^{p-1})\otimes U^q = C^p(X)\otimes U^q$$

を誘導する．但し $C^p(X)$ は X の cochain group を表わす．

同型 $\tilde{\mu}$ は $\tilde{\mu}\{j^*(x)\} = [\mu_0(j^*(x))]$ で与えられる．[ ] は cohomology 群の元を表わす．

特に $d_3^{p,0}$ について考えると

(2.1) $\quad d_3^{p,0}\{j^*(x)\} = \{\delta(x)\}$

$$j^*: \tilde{U}^p(X^{p+2}/X^{p-1}) \longrightarrow \tilde{U}^p(X^p/X^{p-1})$$
$$\delta: \tilde{U}^p(X^{p+2}/X^{p-1}) \longrightarrow \tilde{U}^{p+1}(X^{p+3}/X^{p+2})$$

である．ここで，$\tilde{U}^{p+1}(X^{p+3}/X^{p+2})$ の元について調べる．

定理 2.1 $\quad x\in \tilde{U}^{p+1}(X^{p+3}/X^{p+2})$ は $f: S^{2m-p-1}(X^{p+3}/X^{p+2}) \longrightarrow MU(m)$ で表わされていると仮定すると

$$\mu_0(x) = -\frac{1}{2} S_*^{p+1-2m} f^* \Phi_\xi(c_1(\xi^m)) \otimes [CP(1)]$$

但し，ξ^m は $BU(m)$ 上の複素普遍バンドル，Φ_ξ は Thom 同型，$c_1(\xi^m)$ は ξ^m の 1-st Chern class，$[CP(1)]$ は一次元複素射影空間の bordism class．

証明　μ_0 の定義より $\tilde{U}^{p+1}(S^{p+3})$ の元 $x=[f]$，$f: S^{2m-p-1}S^{p+3} \longrightarrow MU(m)$ について証明すれば十分である．$\iota \in \tilde{U}^0(S^0)$ で単位元を表わし，$S_*^{-p-3}(x)=[V^2]\in U^{-2}$ と置くと，

$$x = S_*^{p+3}(\iota)\cdot[V^2]$$

となる．f を $MU(m)\supset BU(m)$ に対し t-regular な写像 f' で近似すると，$f'^{-1}(BU(m)) = V^2$．$V^2 \subset S^{2m+2}$ の normal bundle を η とすると bundle 写像

$$\bar{f}': \eta \longrightarrow \xi^m$$

が誘導される．η の Thom complex $T(\eta)$ への S^{2m+2} からの自然な写像を J とすると，J と $\bar{f}'$ が誘導する写像 $\hat{f}': T(\eta) \longrightarrow MU(m)$ との合成 $\hat{f}'\circ J$ と f は homotopic である，[5]．一方 U^{-2} の生成元は $[CP(1)]$ である．$[V^2]=a[CP(1)]$ とおくと，

$$a = \frac{1}{2} < c_1(V^2), [V^2] > .$$

ここで，$<,>$ は V^2 の 1-st Chern class の Chern number．

$$\mu_0(x) = \frac{1}{2} < c_1(V^2), [V^2] > e^{p+3} \otimes [CP(1)]$$

$c_1(V^2)$ は V^2 の tangent bundle の 1-st Chern class であるから

$$c_1(V^2) = -c_1(\eta)$$

一方，　$< c_1(\eta), [V^2] > = < J^*\hat{f}'^*\Phi_\xi(c_1(\xi^m)), e_{2m+2} >$

$$= < f^{*}\Phi_{\xi}(c_1(\xi^{m})),\ e_{2m+2} >$$
$$= < S_{*}^{p+1-2m} f^{*}\Phi_{\xi}(c_1(\xi^{m})),\ e_{p+3} >$$

§3.　定理1.2の証明

(2.1)で与えられる式より，$[\mu_0(\delta(x))] \in \tilde{H}^{p+3}(X)\otimes U^{-2}$ が $[\mu_0(j^{*}(x))] \in \tilde{H}^{p}(X)$ でどのように表わされるか調べればよい．$x \in \tilde{U}^{p}(X^{p+2}/X^{p-1})$ は $g : S^{2m-p}(X^{p+2}/X^{p-1}) \longrightarrow MU(m)$ で表わされる物とする．$\delta(x)$ は homotopy同値写像 $S^{2m-p-1}(X^{p+3}/X^{p+2}) \longrightarrow S^{2m-p-1}(X^{p+3}/X^{p-1} \cup C(X^{p+2}/X^{p-1}))$ と projection $S^{2m-p-1}(X^{p+3}/X^{p-1} \cup C(X^{p+2}/X^{p-1})) \longrightarrow S^{2m-p}(X^{p+2}/X^{p-1})$ の合成写像 r と g との合成

$$g\circ r :\ S^{2m-p-1}(X^{p+3}/X^{p+2}) \longrightarrow S^{2m-p}(X^{p+2}/X^{p-1}) \longrightarrow MU(m)$$

で表わされる．定理2.1より

$$\mu_0(\delta(x)) = -\frac{1}{2} S_{*}^{p+1-2m}\, r^{*} g^{*} \Phi_{\xi}(c_1(\xi^{m})) \otimes [CP(1)]$$

$r^{*}S_{*} = -\partial$（∂ は coboundary homomorphism）なる関係[7]，があることに注意して，

$$\mu_0(\delta(x)) = \frac{1}{2}\partial S_{*}^{p-2m} g^{*} \Phi_{\xi}(c_1(\xi^{m})) \otimes [CP(1)]$$

簡単のために．

$$y = S_{*}^{p-2m} g^{*} \Phi_{\xi}(c_1(\xi^{m})) \in \tilde{H}^{p+2}(X^{p+2}/X^{p-1})$$

とおく．$\tilde{j}^{*} : \tilde{H}^{p+2}(X^{p+2}/X^{p+1}) \longrightarrow \tilde{H}^{p+2}(X^{p+2}/X^{p-1})$ は onto であるから，$\tilde{j}^{*}(z) = y$ となる元 $z \in \tilde{H}^{p+2}(X^{p+2}/X^{p+1})$ が存在する．z の reduction mod 2 homomorphism ρ_2 の像 $\rho_2(z)$ は cocycle であ

るから，

(3.1)　$[\mu_0(\delta(x))] = \beta_2[\rho_2(z)] \otimes [CP(1)]$

ここで，β_2は Bockstein homomorphism で［ ］は cohomology の元を表わす．Z_2-係数群で次の可換な図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}^{p+2}(X) \arrow[r, "i_1^*"] & \tilde{H}^{p+2}(X^{p+2}) & \tilde{H}^{p+2}(X^{p+2}/X^{p-1}) \arrow[l, "k_1^*"'] & \tilde{H}^{p+2}(X^{p+2}/X^{p+1}) \arrow[l, "\tilde{j}^*"'] \\
\tilde{H}^{p}(X) \arrow[u, "Sq^2"] \arrow[r, "i_2^*"] \arrow[dr, "i_3^*"'] & \tilde{H}^{p}(X^{p+2}) \arrow[u, "Sq^2"] \arrow[d, "i_4^*"] & \tilde{H}^{p}(X^{p+2}/X^{p-1}) \arrow[l, "k_2^*"'] \arrow[u, "Sq^2"] \arrow[d, "j^*"] & \\
 & \tilde{H}^{p}(X^{p}) & \tilde{H}^{p}(X^{p}/X^{p-1}) \arrow[l, "k_3^*"'] &
\end{tikzcd}$$

$i_1^*[\rho_2(z)] = k_1^*\tilde{j}^*\rho_2(z)$　である．一方，$\rho_2(c_1(\xi^m)) = \Phi_\xi^{-1} Sq^2 \Phi_\xi(1)$　［6］に注意すると，

$$\begin{aligned}
\tilde{j}^*\rho_2(z) &= \rho_2(y) \\
&= Sq^2 S_*^{p-2m} g^* \Phi_\xi(1) \\
&= Sq^2 \mu_0(x)
\end{aligned}$$

$i_2^*[\mu_0(j^*(x))] = k_2^*(\mu_0(x))$　及び，i_s^*　$(s = 1, 2, 3, 4)$が injective であることから

$$Sq^2[\mu_0(j^*(x))] = [\rho_2(z)]$$

を得る．従って，$\tilde{\mu}$の定義と(3.1)より，定理1.2が証明される．以上細かい証明については［4］を参照されたい．

参 考 文 献

[1] S. Araki and H. Toda : Multiplicative structures in mod q cohomology theories I Osaka J. Math. 2 (1965) 71-115, II Osaka J. Math. 3 (1966)

[2] H. Cartan and others : Cartan Seminar Notes, 1950-51, Paris.

[3] P. E. Conner and E. E. Floyd : Torsion in SU-bordism Mem. A. M. S. 60 (1966)

[4] M. Kamata : On the differential $d_3^{p,0}$ of U-cobordism spectral sequence (to appear)

[5] J. Milnor : Differential Topology, Lecture note Princeton University (1958)

[6] J. Milnor : Lectures on characteristic class Princeton University (1958)

[7] G. W. Whitehead : Generalized homology theories Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962) 227-283.