数理解析研究所講究録
第131巻 1971年 57-66

Oriented bordism and involutions

大阪大 理 小宮克弘

topological pair (X, A) とその involution $\tau: (X.A) \to (X.A)$ を $(X.A.\tau)$ で表す。Stong [3] は, $(X.A.\tau)$ の unoriented equivariant bordism groups $\mathfrak{N}_*(X.A.\tau)$ 及び $\hat{\mathfrak{N}}_*(X.A.\tau)$ を定義し, それらの性質を調べた。

本稿に於ては, 任意の involution $(X.A.\tau)$ に対し, その oriented equivariant bordism groups を定義し, これと Stong の unoriented equivariant bordism group との間に Wall type ([4]) 及び Dold type ([1]) の exact triangles が成立することを示す。又, 適当な equivariant Thom spectra に依って, oriented equivariant "cobordism" groups を定義し, これらと先の bordism groups との間に Poincaré type の dualities が存在することを示す。

以上が本稿の内容であるが, これらに関する詳細及びここで定義した oriented equivariant bordism groups に関するその他の性質に関しては, 間も無く発表されるであろう [2]

をご覧頂きたい。

§1. 定義

involution (X, A, τ) を一つ固定して考える。

(1) unoriented case

boundary をもつ compact differentiable manifold M とその differentiable involution μ, 及び equivariant map $f: (M, \partial M) \to (X, A)$ (i.e., $\tau f = f\mu$) の triple (M, μ, f) を考える。二つの triple が bordant : $(M, \mu, f) \sim (M', \mu', f')$ であるとは，次の条件を満たす 4-tuple (W, V, ν, g) が存在するときに云う：

W, V は boundary をもつ compact differentiable manifolds で，$\partial V = \partial M \cup \partial M'$ (disjoint union)

$\partial W = M \cup V \cup M'$ (boundaries を貼合せる)

$\nu: (W, V) \to (W, V)$ は differentiable involution で

$\nu|M = \mu, \quad \nu|M' = \mu'$

$g: (W, V) \to (X, A)$ は equivariant map で

$g|M = f, \quad g|M' = f'$

これは同値関係である。この同値関係に依る (M, μ, f) の class を $[M, \mu, f]$ で表し，その class の集合を $\mathfrak{N}_*(X, A, \tau)$ で表す。即ち，$\mathfrak{N}_*(X, A, \tau) = \{(M, \mu, f)\}/\sim$ 。　これは

graded $\mathfrak{N}$-module になる。

上の定義に於て，involutions μ, μ', ν を凡て fixed-point free なものに限るとき，graded $\mathfrak{N}$-module
$\hat{\mathfrak{N}}_*(X.A.\tau) = \{(M, \mu. f) \mid \mu \text{ は free}\}/\sim$ が定義される。

尚，$A=\phi$ のとき，$\mathfrak{N}_*(X,\tau)$，$\hat{\mathfrak{N}}_*(X.\tau)$ と表す。

(2) oriented case

unoriented case の triple $(M, \mu. f)$ 及び 4-tuple (W, V, ν, g) で，特に，M, W, V は oriented，μ, ν は orientation-preserving (以下，o-p と略す)，又は，orientation reversing (o-r と略す) なものを考えるとき，次の四つの graded Ω-modules が定義される：

$$\Omega^+_*(X.A.\tau) = \{(M, \mu. f) \mid \mu \text{ は o-p}\}/\sim$$
$$\hat{\Omega}^+_*(X.A.\tau) = \{(M, \mu. f) \mid \mu \text{ は o-p かつ free}\}/\sim$$
$$\Omega^-_*(X.A.\tau) = \{(M, \mu. f) \mid \mu \text{ は o-r}\}/\sim$$
$$\hat{\Omega}^-_*(X.A.\tau) = \{(M, \mu. f) \mid \mu \text{ は o-r かつ free}\}/\sim .$$

§2. Poincaré dualities

$ESO(n) \to BSO(n)$ を n 次元 universal oriented vector bundle，$MSO(n)$ をこの Thom space とする。$BSO(n)$ は無限次元ユークリッド空間 R^∞ の n 次元 oriented subspaces H の全体と考えてよい。こう考えるとき，

$ESO(n) = \{(v, H) \mid v \in H,\ H \in BSO(n)\}$ である。このとき，$ESO(n)$ の bundle map としての involutions τ_n^+, τ_n^- を，$\tau_n^+ = \text{identity}$，$\tau_n^-(v, H) = (v, -H)$，ここに，$-H$ は H の orientation を逆にした oriented subspace，と定義する。

補題1

> $E \to B$ を n 次元 oriented vector bundle とし，α を E の bundle map としての free involution とする。さらに $\bar{\alpha}$ を α に依り cover される B の involution とするとき，$B/\bar{\alpha}$ は paracompact かつ Hausdorff，又は B は paracompact とする。このとき，α が o-p ならば，equivariant bundle map $\varphi : (E, \alpha) \to (ESO(n), \tau_n^+)$ が存在する。又，α が o-r ならば，$\varphi : (E, \alpha) \to (ESO(n), \tau_n^-)$ が存在する。さらに両方の場合とも，φ は equivariant bundle homotopy の意味で一意的である。

この補題依り，次の equivariant maps が得られる：

$$h_n^+ : (\Sigma MSO(n), \Sigma\tau_n^+) \to (MSO(n+1), \tau_{n+1}^+)$$

$$h_n^- : (\Sigma MSO(n), \Sigma\tau_n^-) \to (MSO(n+1), \tau_{n+1}^-)$$

ここに，Σ は suspension を表す。これより，次の equivariant spectra が定義される：

$$MSO^+ = \{ (MSO(n),\ \tau_n^+),\ h_n^+ \}$$
$$MSO^- = \{ (MSO(n),\ \tau_n^-),\ h_n^- \}$$

このspectraに依って，任意のinvolution (X, A, τ)に対して次のoriented equivariant cobordism groupsが定義される：

$$\Omega_+^n(X, A, \tau) = \lim_{k \to \infty} [(\Sigma^k(X/A), \Sigma^k \tau), (MSO(n+k), \tau^+_{n+k})]$$
$$\Omega_-^n(X, A, \tau) = \lim_{k \to \infty} [(\Sigma^k(X/A), \Sigma^k \tau), (MSO(n+k), \tau^-_{n+k})]$$

そして，次のPoincaré dualitiesが得られる：

定理1

(X, A, τ)をcompact pairのinovolutionとする。$X-A$はboundaryのないn次元oriented manifoldとし，$\tau|X-A$はfixed-point freeなdifferentiable involutionとする。

このとき，$\tau|X-A$がo-pならば，

$$\Omega_+^k(X, A, \tau) \cong \Omega^+_{n-k}(X-A, \tau) \quad (\cong \hat{\Omega}^+_{n-k}(X-A, \tau))$$
$$\Omega_-^k(X, A, \tau) \cong \Omega^-_{n-k}(X-A, \tau) \quad (\cong \hat{\Omega}^-_{n-k}(X-A, \tau))$$

又，$\tau|X-A$がo-rならば，

$$\Omega_+^k(X, A, \tau) \cong \Omega^-_{n-k}(X-A, \tau) \quad (\cong \hat{\Omega}^-_{n-k}(X-A, \tau))$$
$$\Omega_-^k(X, A, \tau) \cong \Omega^+_{n-k}(X-A, \tau) \quad (\cong \hat{\Omega}^+_{n-k}(X-A, \tau))$$

§3. Exact triangles

n次元manifold MのTangent bundleをτ_Mで表し，そのn-fold exterior power $\Lambda^n(\tau_M)$を$\det \tau_M$で表す。そうする

と，これはM上の line bundle である。$\alpha : M \to RP(\infty)$ を $\det \tau_M$ の classifying map とすると，十分大きな r に対して $\alpha(M) \subset RP(r)$ である。このとき，α を M の $RP(r)$-structure と呼ぶ。

involution (X, A, τ) を一つ固定しておいて，4-tuple (M, μ, f, α) を考える：ここに，(M, μ, f) は §1 で考えた unoriented triple で μ は free，α は M の $RP(1)$-structure である。α を cover する bundle map を $\overline{\alpha}$ で表す。
$\overline{\alpha} \circ \det d\mu = \overline{\alpha}$ となる様な4-tuple (M, μ, f, α) の作る bordism group を $\hat{\mathfrak{M}}^{+}_{*}(X, A, \tau)$ で表し，$\overline{\alpha} \circ (-\det d\mu) = \overline{\alpha}$ を満たす 4-tuple (M, μ, f, α) の作る bordism group を $\hat{\mathfrak{M}}^{-}_{*}(X, A, \tau)$ で表す。

$F : \hat{\mathfrak{M}}^{+}_{*}(X, A, \tau) \to \hat{\mathfrak{N}}_{*}(X, A, \tau)$ 及び
$F : \hat{\mathfrak{M}}^{-}_{*}(X, A, \tau) \to \hat{\mathfrak{N}}_{*}(X, A, \tau)$ を $RP(1)$-structure を忘れる forgetful homomorphism とする。

任意の class $[M, \mu, f] \in \hat{\mathfrak{N}}_{*}(X, A, \tau)$ をとり，$\det \tau_M$ の classifying map $\alpha : M \to RP(r)$ として，$RP(r-2)$ と transverse regular で $\alpha\mu = \alpha$ となるものをとる。
$N = \alpha^{-1}(RP(r-2))$ とし，$d[M, \mu, f] = [N, \mu|N, f|N]$ と定めることに依り，degree -2 の homomorphism
$d : \hat{\mathfrak{N}}_{*}(X, A, \tau) \to \hat{\mathfrak{N}}_{*}(X, A, \tau)$ が得られる。

定理2

次の sequences は exact である：

$$0 \to \hat{\mathfrak{N}}^{+}_{*}(X, A, \tau) \xrightarrow{F} \hat{\mathfrak{N}}_{*}(X, A, \tau) \xrightarrow{d} \hat{\mathfrak{N}}_{*}(X, A, \tau) \to 0$$

$$0 \to \hat{\mathfrak{N}}^{-}_{*}(X, A, \tau) \xrightarrow{F} \hat{\mathfrak{N}}_{*}(X, A, \tau) \xrightarrow{d} \hat{\mathfrak{N}}_{*}(X, A, \tau) \to 0$$

M を oriented manifold とすると，$\det \tau_M$ は trivial であり，M に Riemannian metric を与えておけば，それに対して canonically に trivialization $\det \tau_M \cong M \times R^1$ が定まる。このとき，

補題2

M を oriented manifold，μ をその involution とするとき，μ が o-p あるいは o-r であるための必要十分条件は，それぞれ，$\det d\mu = \mu \times 1$ あるいは $\det d\mu = \mu \times (-1)$ となることである。

(M, μ, f) を oriented triple とし，$c : M \to RP(1)$ を point map とする。このとき補題2より，μ が o-p ならば 4-tuple (M, μ, f, c) は $\hat{\mathfrak{N}}^{+}_{*}(X, A, \tau)$ の class を代表し，又 μ が o-r ならば $\hat{\mathfrak{N}}^{-}_{*}(X, A, \tau)$ の class を代表することがわかる。従って，任意の class $[M, \mu, f] \in \hat{\Omega}^{+}_{*}(X, A, \tau)$ 又は $\in \hat{\Omega}^{-}_{*}(X, A, \tau)$ に対し，$\rho[M, \mu, f] = [M, \mu, f, c]$ と定めることに依り，

homomorphisms $\rho : \hat{\Omega}^+_*(X.A.T) \to \hat{\mathfrak{N}}^+_*(X.A.T)$ 及び $\rho : \hat{\Omega}^-_*(X.A.T) \to \hat{\mathfrak{N}}^-_*(X.A.T)$ が得られる。

unoriented triple (M, μ, f) に対し，$\det \tau M$ の classifying map $\alpha : M \to RP(r)$ として，$RP(r-1)$ と transverse regular でかつ，α を cover する bundle map を $\bar{\alpha}$ とするとき，$\bar{\alpha} \circ \det d\mu = \bar{\alpha}$ となるものをとり，$N = \alpha^{-1}(RP(r-1))$ とする。このとき，triple $(N, \mu|N, f|N)$ は $\hat{\Omega}^+_*(X.A.T)$ の class を代表することが補題2依りわかる。又，α として $\bar{\alpha} \circ (-\det d\mu) = \bar{\alpha}$ をみたすものをとると，$(N, \mu|N, f|N)$ は $\hat{\Omega}^-_*(X.A.T)$ の class を代表することがわかる。このこと依り，degree -1 の homomorphisms
$\partial : \hat{\mathfrak{N}}_*(X.A.T) \to \hat{\Omega}^+_*(X.A.T)$ 及び
$\partial : \hat{\mathfrak{N}}_*(X.A.T) \to \hat{\Omega}^-_*(X.A.T)$ が定義される。

定理3

次の triangles は exact である：

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \hat{\Omega}^+_*(X.A.T) \arrow[rr, "2"] & & \hat{\Omega}^+_*(X.A.T) \arrow[dl, "\rho"] \\ & \hat{\mathfrak{N}}^+_*(X.A.T) \arrow[ul, "\partial F"] & \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] \hat{\Omega}^-_*(X.A.T) \arrow[rr, "2"] & & \hat{\Omega}^-_*(X.A.T) \arrow[dl, "\rho"] \\ & \hat{\mathfrak{N}}^-_*(X.A.T) \arrow[ul, "\partial F"] & \end{tikzcd}$$

ここに，2 は各 class を2倍する homomorphism。

この exact triangles と定理2の exact sequences 依り，

次の exact triangles が得られる：

定理4

次の triangles は exact である：

$$
\begin{tikzcd}
\hat{\Omega}^{+}_{*}(X, A, \tau) \oplus \hat{\mathfrak{N}}_{*}(X, A, \tau) \arrow[rr, "{(2,0)}"] & & \hat{\Omega}^{+}_{*}(X, A, \tau) \arrow[dl, "F"] \\
& \hat{\mathfrak{N}}_{*}(X, A, \tau) \arrow[ul, "{(\partial, d)}"] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\hat{\Omega}^{-}_{*}(X, A, \tau) \oplus \hat{\mathfrak{N}}_{*}(X, A, \tau) \arrow[rr, "{(2,0)}"] & & \hat{\Omega}^{-}_{*}(X, A, \tau) \arrow[dl, "F"] \\
& \hat{\mathfrak{N}}_{*}(X, A, \tau) \arrow[ul, "{(\partial, d)}"] &
\end{tikzcd}
$$

ここに, F は orientedness を忘れる forgetful homomorphism.

文　献

[1] A. Dold; Structure de l'anneau de cobordisme Ω, Bourbaki seminar notes, Paris, 1959-60.

[2] K. Komiya; Oriented bordism and involutions, to appear in Osaka J. of Math..

[3] R. E. Stong; Bordism and involutions, Ann. of Math. 90 (1969) 47-74.

[4] C. T. C. Wall; Determination of the cobordism ring, Ann. of Math. 72 (1960) 292-311.