数理解析研究所講究録
第131巻 1971年 67-79



# Bordism Algebra of Involutions

阪大 理　内田伏一

## §1. 序

$\mathfrak{N}_*$ を unoriented Thom bordism ring, $\mathfrak{N}_*(Z_2)$ を fixed point free smooth involutions の作る unoriented bordism 群とする。 $[S^n, a]$ を $n$ 次元球面上の antipodal involution の bordism類とするとき, $\mathfrak{N}_*(Z_2)$ は $\{[S^n, a]\}_{n\geq 0}$ を基とする $\mathfrak{N}_*$上の自由加群であることが知られている([2], 定理23.2)。

$T_1: M_1 \to M_1$ 及び $T_2: M_2 \to M_2$ を fixed point free smooth involutions とするとき, $T_1\times T_2$, $T_1\times 1$, $1\times T_2$ は互いに可換な $M_1\times M_2$ 上の fixed point free smooth involutions であり, $T_1\times 1$ 及び $1\times T_2$ は orbit 多様体 $M_1\times M_2/T_1\times T_2$ 上の同一の fixed point free smooth involution $\overline{T_1\times 1} = \overline{1\times T_2}$ を与える。 そこで, 積を

$$[M_1, T_1]\cdot[M_2, T_2] = [M_1\times M_2/T_1\times T_2,\ \overline{T_1\times 1}]$$

によって定義すれば, $\mathfrak{N}_*(Z_2)$ は $\mathfrak{N}_*$-algebra になる。 本稿では $\mathfrak{N}_*$-algebra $\mathfrak{N}_*(Z_2)$ の構造について解説する。

J. C. Su [6] は bordism特性数の考察によって、幸運にも次の定理を得ることが出来た。

定理 1 (J. C. Su). $\mathfrak{N}_*(Z_2)$ は $\mathfrak{N}_*$-algebra として exterior algebra になる。即ち、$x_n = [S^{2^n}, a] + [P^{2^n}][S^0, a]$ として

$$\mathfrak{N}_*(Z_2) \cong \Lambda_{\mathfrak{N}_*}(x_n)_{n=1}^{\infty}$$

しかし、$\mathfrak{N}_*$-module としての基 $\{[S^k, a]\}_{k\geq 0}$ を個々に $\{x_n\}$ を用いて表現することには成功していない。従って Smith 準同型写像等と積の関係については不明のままであった。そこで我々は $\mathfrak{N}_*$-module としての基 $\{[S^k, a]\}_{k\geq 0}$ の間の積を、この基を用いて表わすことを試みる。鎌田氏 [3] が $\Omega_*(BZ_p)$ の積構造を考察した際に Mischenco 列を用いた方法を Boardman [1] による $\mathfrak{N}^*(BO(1))$ における primitive な元 $P_W$ を用いて再現することによって次の定理を得る。

定理 2. $\alpha_k(m, n) \in \mathfrak{N}_k$ を次式で与える.

$$[S^m, a][S^n, a] = \sum_{k\geq 0} \alpha_k(m, n)[S^k, a]$$

このとき,

(a) $\exists z_i \in \mathfrak{N}_i$ : $z_0 = 1$, $z_i = 0$ (if $i+1 = 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$) s.t.

$$\sum_{i\geq 1} z_{i-1}\alpha_{k+i}(m, n) = \sum_{i\geq 1} z_{i-1}(\alpha_k(m-i, n) + \alpha_k(m, n-i)) \quad \text{for } \forall k, m, n$$

(b) $\alpha_{m+n}(m,n) = \binom{m+n}{m} \mod 2$

(c) $\alpha_0(m,n) = [P^m]\cdot[P^n] + \sum_{k\geq 1} \alpha_k(m,n)\cdot[P^k]$.

(d) $[H_{m,n}] = \sum_{k\geq 1} \alpha_k(m,n)\cdot[P^{k-1}]$

ここに，$p = \min(m,n)$ とおくとき

$$H_{m,n} = \{([x_0,\cdots,x_m],[y_0,\cdots,y_n]) \in P^m \times P^n : x_0y_0 + x_1y_1 + \cdots + x_py_p = 0\}.$$

等式(a)は次のように行列表示出来る。

$$\begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & \cdots & z_{m+n-1} \\ & z_0 & z_1 & \cdots & z_{m+n-2} \\ & & \cdots & & \\ & & z_0 & \cdots & z_{m+n-k} \\ 0 & & & \cdots & \\ & & & & z_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1(m,n) \\ \alpha_2(m,n) \\ \vdots \\ \alpha_k(m,n) \\ \vdots \\ \alpha_{m+n}(m,n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i\geq 1} z_{i-1}(\alpha_0(m-i,n)+\alpha_0(m,n-i)) \\ \vdots \\ \sum_{i\geq 1} z_{i-1}(\alpha_{k-1}(m-i,n)+\alpha_{k-1}(m,n-i)) \\ \vdots \\ \alpha_{m+n-1}(m-1,n)+\alpha_{m+n-1}(m,n-1) \end{pmatrix}.$$

従って，$m, n$ についての帰納法により，各 $\alpha_k(m,n)$ は $z_k$ 及び $[P^i]$ によって決定出来るが，更に差

$$\binom{m+n}{m}\cdot z_{m+n-1} - [H_{m,n}]$$

は $z_0, z_1, \cdots, z_{m+n-2}$ 及び $[P^2], \cdots, [P^{m+n-1}]$ に関する多項式として表わし得ることが分る。即ち，各 $z_k$ は $[P^k]$, $[H_{m,n}]$ によって表わし得る。これに関して，例えば

$$z_{2k} = [P^{2k}],\quad k = 1, 2, 3, 4, \cdots$$

であることが示されている[7]。

## §2. 周辺の状況

前記定理の証明に入る前に、周辺の状況について知られていることを列挙しておこう。一般に compact Lie 群 $G$ に対して、bordism 群 $\mathfrak{N}_*(G)$, $\Omega_*(G)$, $U_*(G)$ 等が定義され([2], §19 以降) 種々研究されているが、特に $G$ が可換であれば、$\mathfrak{N}_*(Z_2)$ の場合と同様に積構造をもつ。これについて

(i) $\mathfrak{N}_*(Z_2) \cong \Lambda_{\mathfrak{N}_*}(x_n)_{n=0}^{\infty}$, $x_n = [S^{2^n}, a] + [P^{2^n}][S^0, a]$, $[S^0, a] = 1$.

(ii) $\mathfrak{N}_*(Z_k) \cong \mathfrak{N}_*$ ($k$: odd), $[Z_k, Z_k] = 1$.

(iii) $\mathfrak{N}_*(S^1) \cong \Lambda_{\mathfrak{N}_*}(y_n)_{n=0}^{\infty}$, $y_n = [S^{2^{n+1}+1}, \mu] + [CP^{2^n}]\cdot[S^1, \mu]$ $[S^1, \mu] = 1$

但し、$\mu\ S^1 \times S^{2k+1} \longrightarrow S^{2k+1}$, $\mu(\lambda, (z_0, \cdots, z_k)) = (\lambda z_0, \cdots, \lambda z_k)$.

(iv) $U_*(Z_k)$, ($k$. 自然数) : $U_*$-module with generators

$[Z_k, Z_k] = 1$, $[S^1, T_k]$, $[S^3, T_k]$, $\cdots$, $[S^{2n+1}, T_k]$, $\cdots$ ; $[S^{2m+1}, T_k]\cdot[S^{2n+1}, T_k] = 0$.

但し、$T_k(z_0, \cdots, z_n) = (\lambda z_0, \cdots, \lambda z_n)$, $\lambda = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{k}}$.

(v) $U_*(S^1)$ : free $U_*$-module with basis

$[S^1, \mu] = 1$, $[S^3, \mu]$, $\cdots$, $[S^{2n+1}, \mu]$, $\cdots$

(a) 素数 $p$ に対して、$U_*(S^1) \otimes Z_p$ の $U_* \otimes Z_p$-algebra としての simple system of generators が求められている [3].

(b) $U_*(S^1) \otimes Q \cong U_* \otimes Q[x]$, $x = [S^3, \mu]$.

ここに、(ii),(iv) は bordism spectral 列により積の自明が分り、$U_*$-

module の構造は[4],[5]によって研究されている。(iii) は, (i) を求めた J.C. Su の方法, 即ち bordism 特性数による。(v) の (a),(b) は共に Mischenko 列を用いた鎌田氏の方法[3]による。更に, (iv),(v) に当る $\Omega_*(G)$ については, 生成元が $\mathfrak{N}_*(G)$ の場合と同じであることによって, $\mathfrak{N}_*(G)$ より直接に求められる。

## §3. Bordism algebra $\mathfrak{N}_*(BO(1))$

fixed point free involution $T: M \longrightarrow M$ に対して, double covering $M \longrightarrow M/T$ に associate した $M/T$ 上の line bundle を対応させることによって, $\mathfrak{N}_*$-module としての同型

$$\mathfrak{N}_*(Z_2) \cong \mathfrak{N}_*(BO(1))$$

を得ることが出来て, $[S^n, a]$ には $P^n = S^n/a$ 上の canonical line bundle $\xi_n$ の類 $[\xi_n]$ が対応している。更に, line bundles の bordism 群 $\mathfrak{N}_*(BO(1))$ は external tensor 積によって, $\mathfrak{N}_*$-algebra となるが, 上の対応は $\mathfrak{N}_*$-algebra としての同型を与えており, $[S^m, a]\cdot[S^n, a]$ には $[\xi_m \hat{\otimes} \xi_n]$ が対応している。

従って, 今 $\alpha_i(m, n) \in \mathfrak{N}_i$ を

$$[S^m, a][S^n, a] = \sum_{i=0}^{m+n} \alpha_i(m,n)\cdot[S^i, a]$$

によって与えると, 次式が成り立つ.

$$[\xi_m \hat{\otimes} \xi_n] = \sum_{i=0}^{m+n} \alpha_i(m,n)\cdot[\xi_i].$$

さて，$M^n$ 上の line bundle $\xi$ に対して，bordism特性数

$$\langle W_{i_1}(M)\cdots W_{i_r}(M)\, W_1(\xi)^k, \sigma_M\rangle, \quad i_1+\cdots+i_r+k=n$$

を考える。ここに，$W_i(M)$ は $M$ の $i$-次 Stiefel-Whitney 類，$W_1(\xi)$ は $\xi$ の 1-次 Stiefel-Whitney 類，$\sigma_M \in H_n(M^n; Z_2)$ は $M$ の基本類を表わす。Conner-Floyd ([2], 定理 17.2, 23.1) によって，$M$ 上の $\xi$ と $M'$ 上の $\xi'$ とは，すべての bordism特性数が等しいとき，そのときに限り $\mathfrak{N}_*(BO(1))$ の同じ元を表わすことが知られている。J.C.Su は，この事実を用いて定理 1 を証明したが，ここでは紙数の都合で，その要点だけを挙げておく。

(i) $\langle W_1(\xi_m \hat\otimes \xi_n)^{m+n}, \sigma_{P^m\times P^n}\rangle \equiv \binom{m+n}{m} \bmod 2$ より $\alpha_{m+n}(m,n) \equiv \binom{m+n}{m}$.

(ii) $P^n\times P^n$ 上の line bundle $\xi_n\hat\otimes\xi_n$ に対する bordism特性数の中で $W_1(\xi_n\hat\otimes\xi_n)^k$, $k>0$ を含む項はすべて零である。従って

$$[\xi_n\hat\otimes\xi_n] = [P^n]^2[\xi_0] \quad \text{即ち} \quad ([S^n,a]+[P^n][S^0,a])^2 = 0.$$

§4. $\mathfrak{N}^*(BO(1))$ の primitive element $P_N$ について

$MO=\{MO(k)\}$ を unoriented Thom spectrum とする。任意の finite CW-complex $X$ と，その subcomplex $A$ の組に対して

$$\mathfrak{N}^k(X,A) = \varinjlim_q\, [S^q(X/A), MO(q+k)]$$

$$\mathfrak{N}^*(X,A)=\sum_k \mathfrak{N}^k(X,A)$$

と置くことにより，$\mathfrak{N}^*=\mathfrak{N}^*(\{a\ \text{point}\})$ 上の環 $\mathfrak{N}^*(X,A)$ が与えられる。更に $(X,A)$, $(Y,B)$ を finite CW-complexes の組とするとき，cross 積によって

$$\mathfrak{N}^*(X,A)\otimes_{\mathfrak{N}^*}\mathfrak{N}^*(Y,B)\cong\mathfrak{N}^*(X\times Y,A\times Y\cup X\times B)$$

が成り立つ。

今，$X$ を compact smooth $n$-manifold とするとき，$t$-regularity theorem によって，Atiyah-Poincaré の duality

$$D_X:\mathfrak{N}^k(X)\xrightarrow{\cong}\mathfrak{N}_{n-k}(X,\partial X)$$

が与えられ，次の二つの図式は可換となる。

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{N}^*(X) & \xrightarrow{D_X} & \mathfrak{N}_*(X,\partial X)\\
\downarrow{\scriptstyle i^*} & & \downarrow{\scriptstyle \partial}\\
\mathfrak{N}^*(\partial X) & \xrightarrow{D_{\partial X}} & \mathfrak{N}_*(\partial X)
\end{array},$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{N}^*(X)\otimes\mathfrak{N}^*(Y) & \xrightarrow{D_X\otimes D_Y} & \mathfrak{N}_*(X,\partial X)\otimes\mathfrak{N}_*(Y)\\
\downarrow{\scriptstyle \kappa} & & \downarrow{\scriptstyle \kappa}\\
\mathfrak{N}^*(X\times Y) & \xrightarrow{D_{X\times Y}} & \mathfrak{N}_*(X\times Y,\partial X\times Y)
\end{array}$$

ここに，$i:\partial X\hookrightarrow X$，$\partial Y=\emptyset$，$\kappa$ は cross 積である。

特に，$n$ 次元実射影空間 $P^n$ の cobordism 環 $\mathfrak{N}^*(P^n)$ 及び Atiyah-Poincaré duality について考えてみよう。inclusion

$$P^n\xhookrightarrow{f_n}P^\infty=BO(1)\hookrightarrow MO(1)$$

の表わす $\mathfrak{N}^1(P^n)$ の元を $W_1(\xi_n)$ と書く（この元は $\xi_n$ の *cobordism* *Stiefel-Whitney* 類と呼ばれる元である）。このとき，次の事実が示される。

補題 1. $\mathfrak{N}^*(P^n) \cong \mathfrak{N}^* \otimes (Z_2[W_1(\xi_n)]/W_1(\xi_n)^{n+1})$

$$D_{P^n}(W_1(\xi_n)^k) = [P^{n-k} \hookrightarrow P^n] \in \mathfrak{N}_{n-k}(P^n)$$

従って，$\mathfrak{N}^*(BO(1)) = \varprojlim_n \mathfrak{N}^*(P^n)$ と定義し，$W_1 \in \mathfrak{N}^1(BO(1))$ を $f_n^*(W_1) = W_1(\xi_n)$ なる元とすれば，$\mathfrak{N}^*(BO(1)) \cong \mathfrak{N}^* \otimes Z_2[W_1]$。

さて $BO(1)$ 上の *universal line bundle* を $\gamma^1$ とすれば，$f_n^*(\gamma^1) \cong \xi_n$ であり，$BO(1) \times BO(1)$ 上の *external tensor* 積による *line bundle* $\gamma^1 \hat{\otimes} \gamma^1$ に対する *classifying map* を

$$\mu : BO(1) \times BO(1) \longrightarrow BO(1)$$

とすれば，$\xi_m \hat{\otimes} \xi_n$ に対する *classifying map* は，合成

$$P^m \times P^n \xrightarrow{f_m \times f_n} BO(1) \times BO(1) \xrightarrow{\mu} BO(1)$$

で与えられる。写像 $\mu$ を用いて，$\mathfrak{N}^*(BO(1))$ は *graded Hopf algebra* になるが，Boardman [1] によって次のような *primitive element* $P_W$ の存在が知られている。

$$\mathfrak{N}^1(BO(1)) \ni P_W = W_1 + \bar{Z}_1 W_1^2 + \bar{Z}_2 W_1^3 + \cdots + \bar{Z}_{n-1} W_1^n + \cdots$$

$$D\bar{Z}_n = Z_n \in \mathfrak{N}_n, \quad Z_i = 0 \text{ if } i+1 = 2, 4, 8, 16, 32, \cdots$$

但し、$D: \mathfrak{N}^{-n}(pt) \cong \mathfrak{N}_n$, $P_W$ が primitive とは

$$\mu^*(P_W) = 1 \times P_W + P_W \times 1$$

なること。

この $P_W$ が $U^*(BU(1)) \otimes Q$ における Mischenco 列に当る。そこで Mischenco 列を用いて degree $-2$ の $U_*$-module homomorphism $U_*(BU(1)) \longrightarrow U_*(BU(1)) \otimes Q$ を構成した鎌田氏の方法[3]にならって、degree $-1$ の $\mathfrak{N}_*$-module homomorphism

$$\textcircled{H} : \mathfrak{N}_*(BO(1)) \longrightarrow \mathfrak{N}_*(BO(1))$$

を $\textcircled{H}([M, f]) = f_* D_M f^* P_W$ によって与える。

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{N}^1(BO(1)) & \xrightarrow{f^*} & \mathfrak{N}^1(M^n) & & \\
\cup\!\!\!\!\downarrow & & \cong \big\downarrow D_M & & \\
P_W & & \mathfrak{N}_{n-1}(M^n) & \xrightarrow{f_*} & \mathfrak{N}_{n-1}(BO(1))
\end{array}$$

Atiyah-Poincaré に関する前述の二つの可換図式によって、この Ⓗ が well-defined な $\mathfrak{N}_*$-module homomorphism であることを証明出来る。ここで特に、$\textcircled{H}([\xi_n])$, $\textcircled{H}([\xi_m \hat{\otimes} \xi_n])$ を補題1を用いて計算してみると、

補題2. $\displaystyle \textcircled{H}([\xi_n]) = \sum_{k \geq 1} Z_{k-1} [\xi_{n-k}]$,

$$\textcircled{H}([\xi_m \hat{\otimes} \xi_n]) = \sum_{k \geq 1} Z_{k-1} \left( [\xi_m \hat{\otimes} \xi_{n-k}] + [\xi_{m-k} \hat{\otimes} \xi_n] \right).$$

証明.

$$\text{Ⓗ}([\xi_n]) = \sum_{k\geq 1} f_{n*} D f_n^*(\Xi_{k-1} W_1^k) = \sum_{k\geq 1} f_{n*} D(\Xi_{k-1} W_1(\xi_n)^k)$$

$$= \sum_{k\geq 1} f_{n*}(z_{k-1}\cdot[P^{n-k}\hookrightarrow P^n]) = \sum_{k\geq 1} z_{k-1}\cdot[\xi_{n-k}].$$

$$\begin{array}{ccc}
P_W & \mathfrak{N}^*(BO(1)) & P_W \\
\Big| & \Big\downarrow \mu^* & \Big\downarrow \\
 & \mathfrak{N}^*(BO(1)\times BO(1)) & 1\times P_W + P_W\times 1 \\
\Big| & \Big\downarrow (f_m\times f_n)^* & \Big\downarrow \\
\text{by definition} & \mathfrak{N}^*(P^m\times P^n) & 1\times f_n^*P_W + f_m^*P_W\times 1 \\
\Big| & \cong\Big\downarrow D & \Big\downarrow \\
 & \mathfrak{N}_*(P^m\times P^n) & [P^m\hookrightarrow P^m]\times Df_n^*P_W + Df_m^*P_W\times[P^n\hookrightarrow P^n] \\
\Big| & \Big\downarrow (f_m\times f_n)_* & \Big\downarrow \\
 & \mathfrak{N}_*(BO(1)\times BO(1)) & [\xi_m]\times \text{Ⓗ}([\xi_n]) + \text{Ⓗ}([\xi_m])\times[\xi_n] \\
\Big\downarrow & \Big\downarrow \mu_*(\text{external tensor 積}) & \Big\downarrow \\
\text{Ⓗ}([\xi_m\hat{\otimes}\xi_n]) & \mathfrak{N}_*(BO(1)) & \sum_{k\geq 1} z_{k-1}\left([\xi_m\hat{\otimes}\xi_{n-k}] + [\xi_{m-k}\hat{\otimes}\xi_n]\right).
\end{array}$$

## §5. 定理2の証明

$\alpha_k(m,n)\in\mathfrak{N}_k$ を次式で与える.

$$[S^m,a][S^n,a] = \sum_{k\geq 0}\alpha_k(m,n)[S^k,a]$$

このとき, §3で考察したように, 次式が成り立つ.

$$[\xi_m\hat{\otimes}\xi_n] = \sum_{k\geq 0}\alpha_k(m,n)[\xi_k]$$

この等式の両辺の $\Theta$ による像を比べると，補題2によって

$$\sum_{k\geq 1} z_{k-1}\Big(\sum_{i\geq 0}(\alpha_i(m,n-k)+\alpha_i(m-k,n))[\xi_i]\Big)$$
$$= \sum_{k\geq 0}\alpha_k(m,n)\Big(\sum_{i\geq 1} z_{i-1}[\xi_{k-i}]\Big).$$

さて，$\mathfrak{N}_*(BO(1))$ は $[\xi_i]$, $i=0,1,2,\cdots$ を基とする free $\mathfrak{N}_*$-module であるから，両辺の $[\xi_i]$ の係数を比較することによって，定理2の等式 (a) を得る。 等式 (b) は，(a) より

$$\alpha_{m+n}(m,n) = \alpha_{m+n-1}(m-1,n) + \alpha_{m+n-1}(m,n-1)$$

が示されるので，$m, n$ についての帰納法で証明される．

最後に，等式 (c), (d) を示すため，二つの $\mathfrak{N}_*$-module homomorphisms

$$\varepsilon : \mathfrak{N}_*(Z_2) \longrightarrow \mathfrak{N}_*, \quad \Delta : \mathfrak{N}_*(Z_2) \longrightarrow \mathfrak{N}_*(Z_2)$$

を定義しよう。 ここに，$\varepsilon$ は augmentation homomorphism と呼ばれ，$\varepsilon([M,T]) = [M/T]$ によって与えられ，$\Delta$ は Smith homomorphism と呼ばれる degree $-1$ の homomorphism であり，次のように定義される。

今，$T: M^n \longrightarrow M^n$ を fixed point free smooth involution とし，$f: M^n \longrightarrow S^k$ を smooth map であり，$S^{k-1}$ 上 $t$-regular であって，更に $f\circ T = a\circ f$ を満たすものとする．ここに $a: S^k \longrightarrow S^k$ は antipodal involution を表わす。このとき，$V^{n-1} = f^{-1}(S^{k-1})$ は $M^n$ の closed submanifold で

あり，$T(V^{n-1}) = V^{n-1}$ となっている。 そこで，

$$\Delta([M^n, T]) = [V^{n-1}, T|V]$$

によって，$\Delta$ を定義する。 この $\Delta$ が well-defined な $\mathfrak{N}_*$-module homomorphism であることは容易に示される（[2], 定理 26.1）。

定義より次式が成り立つ．

$$\varepsilon([S^n, a]) = [P^n], \quad \varepsilon\Delta([S^m, a]\cdot[S^n, a]) = [H_{m,n}].$$

従って，$\alpha_k(m,n) \in \mathfrak{N}_k$ の定義式

$$[S^m, a][S^n, a] = \sum_{k\geq 0} \alpha_k(m,n)\cdot[S^k, a]$$

の両辺に，夫々 $\varepsilon$，$\varepsilon\Delta$ を作用させた像を考えれば，それが等式 (c), (d) を与えている。 （証明終）

## 参考文献


[1] J. M. Boardman: *Unoriented bordism and cobordism*, Univ. of Warwick (1966).

[2] P. E. Conner - E. E. Floyd: *Differentiable Periodic Maps*, Springer-Verlag (1964).

[3] M. Kamata: *On the ring structure of $U_*(BU(1))$*, Osaka J. Math. 7 (1970), 417-422.

[4] M. Kamata : The structure of the bordism group $\mathfrak{U}_*(BZ_p)$, Osaka J. Math. 7 (1970), 409-416

[5] K. Shibata : Oriented and weakly complex bordism algebra of free periodic maps. (to appear)

[6] J. C. Su : A note on the bordism algebra of involutions, Michigan Math. J. 12 (1965), 25-31

[7] F. Uchida : Bordism algebra of involutions, Proc. Japan Acad., 46 (1970), 615-619.