数理解析研究所講究録
第132巻 1971年 1-13

Fuchs のもんだい について.

岡本和夫(東大理).

§1. Riemann 問題

以下、X ; Riemann surface.

S ; discrete subset of X

とする.

一般に. X上で定義されたn階の常微分方程式

(1) $D^n y + p_1(x) D^{n-1} y + \cdots + p_{n-1}(x) Dy + p_n(x) y = 0$

を考える。ここで、DはX上のある1-form ωに関する微分即ち、$Dy \cdot \omega = dy$ で定義される。また $p_j(x)$ $j=1,\cdots n$ はX上の meromorphic function である。.

さらに、我々は、方程式(1)がFuchs型であると仮定しよう。すると、Sを $p_j(x)$ の pole 全体からなる ~~disce~~ discrete set とすれば、よく知られているように.(1)は、$\pi_1(X-S)$ から $GL(n, \mathbb{C})$ への表現類 $\hat{\rho}$ を決める。このようにして Fuchs型線型常微分方程式(1)から、triple $(X, S, \hat{\rho})$ が定まるが、これを Riemann datum とよぶことにする。

Definition 1. Riemann datum $(X, S_0, \hat{\rho}_0)$ が Riemann datum $(X, S, \hat{\rho})$ から reduce された datumであるとは、

(a). $S_0 \subset S$

(b) 任意の表現, $\rho \in \hat{\rho}$; $\pi_1(X-S) \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$.

に対して、$\rho_0 \in \hat{\rho}_0$ が存在して、 diagram

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X-S) \arrow[rr, "i_*"] \arrow[dr, "\rho"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \pi_1(X-S_0) \arrow[dl, "\rho_0"] \\ & GL(n,\mathbb{C}) & \end{tikzcd}$$

が commute する。

(c). $S_0' \subset S$ が上の (a), (b) を満足するものであれば
$S_0 \subseteq S_0'$

<u>Definition</u> 2. 2つの Riemann data $(X, S, \hat{\rho})$, $(X, S', \hat{\rho}')$ が equivalent であるとは、それぞれの reduced system が等しい場合をいう。

言いかえれば、$(X, S_0, \hat{\rho}_0)$ が $(X, S, \hat{\rho})$ の reduced system であるということは、

(a)' $\forall \gamma \in \pi_1(X-S_0)$ に対して $\hat{\rho}(\gamma) \neq I$ (identity matrix).

(b)' $\forall \gamma \in \pi_1(X-S) - \pi_1(X-S_0)$ に対して
$$\hat{\rho}(\gamma) = I$$

ということである。

<u>Riemann Problem</u> 任意に与えられた $(X, S, \hat{\rho})$ に対して、ちょうどそれを Riemann datum として持つ様な、Fuchs 型線型常微分方程式 (1) が存在するか。

この問題は、古くから数多くの数学者によって考察されたが、1957年に H. Röhrl によって次の様な形に解決された。

<u>Theorem</u>　与えられた $(X, S, \hat{\rho})$ に対して、Fuchs 型方程式 (1) が存在して、その Riemann datum を $(X, S', \hat{\rho}')$ とすれば、一般に $S \subset S'$ で

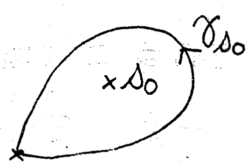
$$(X, S, \hat{\rho}) \sim (X, S', \hat{\rho}')$$

(definition 2の意味での equivalent)

方程式の解で考えれば、これは次のことを意味している。

いま、$s_0 \in S$ をとり、s_0 を正のむきに一周する道の homotopy class を γ_{s_0} とおく。

すると、$\rho(\gamma_{s_0}) = I$ となるような特異点 s_0 は、解の pole になっている。



<u>Definition 3</u>　解の pole になっている（即ち分岐点ではない）特異点をみかけの特異点（apparent singular point）という。

Röhrl の定理の主張することは、みかけの特異点の存在をゆるせば、Riemann 問題の solution は存在する、ということである。

以下、X を compact Riemann surface とし、その genus を g とおく。すると当然次のことが問題となる。$(X, S, \hat{\rho})$ について Riemann 問題の解を作った場合、みかけの特

異点があらわれるとしても、それは最小限どのぐらいまで必要であろうか。以下しばらくこの問題を考えてみよう。

X ; compact Riemann surface of genus g.

$S = \{s_1, s_2, \cdots, s_m\}$.

とし、各 s_j はみかけの特異点ではないとする。(このような特異点を便宜上、wesentlich singularity とよぼう)。すると、$\hat{\rho}$ は、

(2) $$\mathrm{Hom}(\pi_1(X-S), GL(n.\mathbb{C}))/GL(n.\mathbb{C})$$

の元とみなすことができる。(2) の空間を $\mathfrak{M}$ と書く。この時 $\mu \equiv \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{M} = n^2(2g+m-2)+1$

であることはわかっている。

一方、S に特異点をもつような Fuchs 型方程式 (1) は

$$\nu \equiv \frac{1}{2}n^2(m+2g-2) + \frac{1}{2}mn$$

この parameter を含む。すると一般には $\mu \geq \nu$ である。この事情からみても、みかけの特異点を許さないかぎり、Riemann Problem は解をもたない。また $\mu \leqq \nu$ となるのは、$g=0$, $n=2$ のときは $m \leq 3$, $n>2$ のときは $m \leqq 2$ という場合だけである。

それでは、$K \equiv \mu - \nu$ は何を意味するか? この K とみかけの特異点の~~最小数とは~~コスウとは等しくないであろうか。実は、$\mathfrak{M}$ には complex structure が入り、analytic variety にな

るが、irreducible な表現だけを考えれば、それから決まる subset $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$ は manifold になる。そこで、

<u>予想</u>、 $\hat{\rho} \in \mathfrak{M}_0$ の時には、みかけの特異点 にコを許せば Riemann 問題は solution をもつであろう。

§2、Fuchsの問題．

X ; compact Riemann surface of genus g.

$S = \{ a_1 \cdots \ a_m \}$

として、いま、さらに． $S = S_1 \cup S_2$．(disjoint sum)

$S_1 = \{ s_1, \cdots s_k \}$, $\quad S_2 = \{ t_1, \cdots t_l \}$. $l+k=m$.

とする。（X, S, $\hat{\rho}$）をRiemann datum とするような．Fuchs型常微分方程式．

(3) $\quad D^n y + P_1(x, t_1, \cdots t_l) D^{n-1} y + \cdots + P_n(x, t_1 \cdots t_l) y = 0$

を次のように決めることができる。

<u>Theorem</u> 1 （H．Röhrl ）．

$U_j \subset X$ を t_j （$j=1, 2, \cdots l$）の open neighbourhood とする。S_1の点，s_j を fix して、t_j を variable とみなす。今、$\hat{\rho}$ が variable $t_j \in U_j$ によらないならば、方程式 (3) の係数

$$P_j(x, t_1, \cdots t_l).$$

は、 $X \times U_1 \times \cdots \times U_l$ 上 meromorphic である。

さて、次に我々は次の問題を考えよう。

<u>Fuchs' Problem</u>． 方程式(3)の含む parameter を一般に α と書く。$\hat{\rho}$ が、$t_j \in U_j$ によらないとして、関数

$$x = x(t_1, \cdots t_\ell)$$

を決定せよ。

これは極めてむずかしい問題である。少なくとも $g=0$ か、$g=1$ の場合でないと、具体的には扱えそうもない。過去、数学者達が考察したのは、もちろん $g=0$ の場合である。Fuchs からはじまって、Schlesinger, Garnier 等々によって研究されたのも Riemann sphere $\mathbb{P}^1$ 上で定義された方程式についてである。それにもかかわらず、この Fuchs' Problem が興味深いと思われる理由を以下に説明するが、その為には、R. Fuchs によってしらべられた一例を示せば十分であると思われる。

<u>Remark</u> 念の為に数学史にたちもどってみるならば、Fuchs 型方程式とか、Fuchs 群 とかで有名な Fuchs は、L. Fuchs であり、R. Fuchs はその息子である。

さて、$X = \mathbb{P}^1$, $S = \{0, 1, \infty, t\}$ としてみよう。このとき、2階の方程式を考えることにすれば

$$\mu = 9, \qquad \nu = 8, \qquad \therefore \ \kappa = 1$$

であるから、みかけの特異点1つを許すとしよう。

2 階の方程式

(4) $$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

は $\hat{\rho}$ が、t によらない（以下 t を variable と思う）という性質を不変にしたまま

(4)′ $$y'' = py$$

という形に変換できるなら、以下 (4)′ を考える。ここで

(5) $$p(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-t)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{(x-\lambda)^2} + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{x-t} + \frac{\varepsilon}{x-\lambda}$$

(6) $$\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 0$$

λ がみかけの特異点にあたるものであって、(4)′ の Riemannian scheme は

$$\begin{matrix} 0 & 1 & t & \infty & \lambda \\ \frac{1+\rho_0}{2} & \frac{1+\rho_1}{2} & \frac{1+\rho_2}{2} & \sigma & \frac{3}{2} \\ \frac{1-\rho_0}{2} & \frac{1-\rho_1}{2} & \frac{1-\rho_2}{2} & \sigma' & -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

となっている。すると次のことがわかる。

<u>Theorem 2</u>. $\lambda = \lambda(t)$ は非線型常微分方程式

(7) $$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t}\right)\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t-\lambda}\right)\frac{d\lambda}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)^2}\left\{k_\infty - k_0\frac{t}{\lambda^2} + k_1\frac{t-1}{(\lambda-1)^2} - (k_t-1)\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right\}$$

を満足し、かつ、α, β, γ, および ε は t, λ, $\frac{d\lambda}{dt}$ の有理関数となっている。

<u>Remark</u>　k_0, k_1, k_t, k_∞ は constant である。

また、a, b, c, は $\hat{\rho}$ が t によらない、という条件から必然的に t に independent な定数である。

我々が興味深いのは、方程式 (7) である。(7) は Painlevé の transcendental としてよく知られている。動く不岐点をもたない様な非線型常微分方程式を決定するというのは古くからの常微分方程式論における大問題であるが、我々は、Painlevé の研究した場合以外には多くのものを得ていない。この Fuchs の結果からみると、Fuchs' Problem を考察して出てくる方程式というのは、すべてこの type のものではないだろうかと予想するのは、必ずしも無理なこととは言えない。Schlesinger, Garnier 等々の研究においても、R. Fuchs と同様の結果を得ている。

§3. torus 上の方程式．

$g=0$ の場合にいろいろと調べられているとしたら、次は当然、$g=1$ の場合も考えられてよいだろう。もちろんこの場合は、(7) のような「有理関数的」なものではなく「代数関数的」なものが表われるであろう。

以下　$X = \mathbb{T}^1$（複素1次元 complex torus）

$S = (\tau_1, \tau_2)$

として、2階の方程式を考える。しかし、$\mathbb{T}^1$ の universal covering space は、$\mathbb{C}$ であるから、torus 上の方程式をはじめから $\mathbb{C}$ の上で、elliptic function $\wp(x)$ 等々をもちいて書いておくことにする。$\wp(x)$ の基本周期を $2\omega_1, 2\omega_3$ と書く。$\Omega=\{2\alpha\omega_1+2\beta\omega_3 \mid \alpha,\beta\in\mathbb{Z}\}$ として、~~$x\in\Omega$~~ $x\in\mathbb{C}$ と Ω に関して congruent な点全体を $x+\Omega$ と書く。さらに、混乱のない限り、$x+\Omega$ を単に x と書く。

$S=\{0+\Omega,\ t+\Omega\}$ とし、t を variable と考える。我々の考察する方程式は次の type である。

(8) $$y''+p(x,t)y'+q(x,t)y=0.$$

Remark　$\mathbb{C}$ においては、方程式 (8) は

(8)' $$y''=r(x,t)y$$

に変形されうるが、この時、$\hat{\rho}$ が t に independent であるという性質は保存されない。

さて、かんたんな計算によって、我々の場合

$$\mu=9,\qquad \nu=6 \qquad \therefore\ \kappa=3$$

がわかる。従って、みかけの特異点は3コでてくるわけだが、問題を簡略化して、いまみかけの特異点2コで解けていると仮定しよう。その特異点を λ_1, λ_2 とおく。~~すると~~ さらに (8) において、

(9) $$p(x)=k_1+c_0\zeta(x)+c_1\zeta(x-t)-\zeta(x-\lambda_1)-\zeta(x-\lambda_2)$$

(10) $\quad g(x) = k_1 + b_0\zeta(x) + b_1\zeta(x-t) + b_2\zeta(x-\lambda_1) + b_3\zeta(x-\lambda_3)$
$$+ a_0\wp(x) + a_1\wp(x-t)$$

とする。言いかえれば、みかけの特異点 λ_i $(i=1,2)$ における exponent は 0 および 2 とする。

<u>Remark</u> (a). $\zeta(x)$ は elliptic function ではないから、(9), (10) より

(11) $$c_0 + c_1 = 2,$$

(12) $$b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = 0$$

を得る。

(b). 方程式 (8) の Riemannian scheme は

$0+\Omega$	$t+\Omega$	$\lambda_1+\Omega$	$\lambda_2+\Omega$
σ_0	σ_1	0	0
σ_0'	σ_1'	2	2

ここに

(13) $$\sigma_0 + \sigma_0' + \sigma_1 + \sigma_1' = 0.$$

恒等式 (13) は Fuchs' relation に対応するものであるが、実は (11) から (13) は容易に得られる。

方程式 (8), および (9), (10) で、我々は R. Fuchs と同様に、みかけの特異点 λ_1, λ_2 がどについてどの様な微分方程式を満足するかを調べるわけだが、ここでは途中の計算、および、証明はすべて省略し結果だけ次に示すことにする。

興味のある方は、筆者の paper を御参照下さい。

Result (I) $\lambda_i = \lambda_i(t)$ は 非線型方程式系

(E$_1$)
$$\frac{1}{2M}\frac{d^2\lambda_1}{dt^2} = -\frac{1}{4}(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_1-t))\left(\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{d\lambda_i}{dt}\right)^2\right)+\frac{1}{2}(\wp(\lambda_2)-\wp(\lambda_2-t))\frac{d\lambda_1}{dt}\frac{d\lambda_2}{dt}$$
$$-\frac{1}{2}(\wp(\lambda_1-t)-\wp(\lambda_2-t))\frac{d\lambda_1}{dt}+\frac{1}{2}(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2))\frac{d\lambda_2}{dt}$$
$$-M^2(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2))(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_1-t))(\alpha_0-\alpha_1)$$
$$+M\wp'(\lambda_1)(\alpha_0-\alpha_1)+(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_1-t))\alpha_1$$

(E$_2$)
$$\frac{1}{2M}\frac{d^2\lambda_2}{dt^2} = \frac{1}{4}(\wp(\lambda_2)-\wp(\lambda_2-t))\left(\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{d\lambda_i}{dt}\right)^2\right)-\frac{1}{2}(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_1-t))\frac{d\lambda_1}{dt}\frac{d\lambda_2}{dt}$$
$$+\frac{1}{2}(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2))\frac{d\lambda_1}{dt}-\frac{1}{2}(\wp(\lambda_1-t)-\wp(\lambda_2-t))\frac{d\lambda_2}{dt}$$
$$-M^2(\wp(\lambda_1)-\wp(\lambda_2))(\wp(\lambda_2)-\wp(\lambda_2-t))(\alpha_0-\alpha_1)$$
$$+M\wp'(\lambda_2)(\alpha_0-\alpha_1)-(\wp(\lambda_2)-\wp(\lambda_2-t))\alpha_1$$

を満足する。

ここで

$$M = \frac{1}{\zeta(\lambda_2)-\zeta(\lambda_1)+\zeta(\lambda_1-t)-\zeta(\lambda_2-t)}$$
$$\alpha_j = -a_j+\frac{1}{4}c_j^2-\frac{1}{2}c_j \qquad (j=0,1)$$

(II) $k_2(t)$, $b_j(t)$ $(j=1,\cdots 3)$ は $\frac{d\lambda_1}{dt}, \frac{d\lambda_2}{dt}$ および $\wp(\lambda_i)$, $\wp(\lambda_i-t)$, $\zeta(\lambda_i)$, $\zeta(\lambda_i-t)$ $(i=1,2)$ の有理関数である。

(III) k_1 は t に independent に、勝手にとれる。

(IV) 逆に、(I) 〜(III) を満足するように $\lambda_i(t)$, $(i=1,2)$

$k_1,\ k_2(t),\ b_j(t),\ (j=0,1,\cdots 3)$ をえらべば、方程式(8)から決まる表現類 $\hat{\rho}$ は t によらない。

さて、このようにして得られた方程式 $(E_1), (E_2)$ であるが、この方程式は動く分岐点をもたないであろうか。このことは、まだわかっていないが、少なくとも次のような予想はたつ。

予想 $(E_1), (E_2)$ の一般解 $\lambda_i = \lambda_i(t)$ は、動く分岐点をもつとしても、λ_1, λ_2 の適当な対称関数 $\Lambda_1(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$ $\Lambda_2(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$ (たとえば $\phi(\lambda_1)+\phi(\lambda_2)$, $\phi(\lambda_1)\phi(\lambda_2)$) は動く分岐点をもたないであろう。

$K=2$ の場合に於てもこのように面倒な結果になるなら、$K=3$ とすれば、かなり大変なことである。しかし最後に次のことに注意したい。$K=2$ ならば $u+K=8$ である。一方 $(E_1), (E_2)$ の general solution $\lambda_i = \lambda_i(t)$ は初期値 $\lambda_i^0 = \lambda_i(t_0)$, $\lambda_i^{0\prime} = \frac{d\lambda_i}{dt}(t_0)$ を parameter として含むから、$\lambda_i = \lambda_i(t, \lambda_i^0, \lambda_i^{0\prime}, c_0, c_1, a_0, a_1)$ という形をしている。即ち、(11) を考えれば、7つの parameter を含む。(II) より、k_1 は任意だから、Fuchs' Problem の解として得られた system $\{\lambda_i, k_1, k_2, b_j\}$ は8つの parameter を含む。これは $u+K$ の値と同じである。さて $K=3$ としてみよう。この時も k_1 は任意であることは

わかっている。今度は

$$\lambda_j = \lambda_j(t, \lambda_j^0, \lambda_j'^0, c_0, c_1, a_0, a_1) \qquad j=1,2,3.$$

という形で決まることもわかる。ところが、これらの system の含む parameter はみかけ上 10コである。ということは λ_j, $\frac{d\lambda_j}{dt}$ に何らかの関数関係の存在することを意味している。$\kappa=3$ の場合の主要な困難はこの点にある。

参考文献

[1] K. Okamoto, On Fuchs' problem on a torus I; (to appear)

[2] 斎藤利弥, Riemann の問題, 数学, 12巻 (1960–61), p. 145–159.