数理解析研究所講究録
第132巻 1971年 44-53

大域的な理論による特殊関数の取り扱い

津田塾大学
福原 満洲雄
斎藤 ユリ子

1. 同じモノドロミー群をもつ3つの関数族

線型微分方程式の解として定義される関数の漸化公式のような特殊関数に関する線型関係を見透しよく処理するには、Fuchs型ならばモノドロミー群に注目するのが良いように思われる。不確定特異点があらわれる場合には、そこにおける漸近展開の理論を考慮に入れねばならないであろう。ここでは簡単な例についてこの考えを説明することにする。

簡単のため有理関数を係数にもつ2階線型微分方程式の解からなる族のみ考える。$\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$はそのような族で、それらのモノドロミー群は一致するものとし、f_1, $f_2 \in \mathcal{F}$, g_1, $g_2 \in \mathcal{G}$, h_1, $h_2 \in \mathcal{H}$をたてに並べた行列をそれぞれF, G, Hとし

$$(1.1) \qquad F = pG + qH \quad \text{すなわち} \begin{cases} f_1 = pg_1 + qh_1 \\ f_2 = pg_2 + qh_2 \end{cases}$$

でp, qを決める。

一般にある円板Dで正則な関数φを1つの特異点aだけをまわる路Γ_aにそって解析接続してDにもどったとき得られる分枝を$\hat{\varphi}$と書く。$\hat{f}_1$，$\hat{f}_2$をたてに並べた行列を$\hat{F}$と書く。同様に$\hat{G}$，$\hat{H}$を定義すれば、仮定により

$$\hat{F} = C_a F,\quad \hat{G} = C_a G,\quad \hat{H} = C_a H$$

が同じ回路行列C_aで成り立つようにF，G，Hを決めることができる。これから

$$[\hat{F}, \hat{G}] = C_a [F, G]$$

したがって

$$\det[\hat{F}, \hat{G}] = \det C_a \cdot \det[F, G]$$

となり、$[\hat{G}, \hat{H}]$，$[\hat{H}, \hat{F}]$についても同様である。

$$p = \det[F, H]/\det[G, H],\quad q = \det[G, F]/\det[G, H]$$

であるから、$\hat{p} = p$，$\hat{q} = q$となる。ゆえにp，qは一価関数である。その特異点はF，G，Hのどれかの特異点であるか、または$\det[G, H]$の零点であり、後者はたかだか極となるにすぎない。またF，G，Hの確定特異点もたかだか極である。

したがって$\mathcal{F}$，$\mathcal{G}$，$\mathcal{H}$がFuchs型の微分方程式の解からなる族ならば、p，qは有理関数である。

2. Fuchs 型の場合

たとえば

$$\mathfrak{G}=P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \nu+1 \\ \lambda & \mu-1 & \nu' \end{Bmatrix}, \qquad \mathfrak{H}=P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \nu \\ \lambda & \mu-1 & \nu+1 \end{Bmatrix}$$

を考える。

p, をとして定数をとり、(1 1)で$\mathfrak{F}$を定義する。$\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$のモノドロミー群は一致するから、$\mathfrak{F}$のモノドロミー群も一致することは明らかである。

g_1, h_1として1において$\mu-1$を指数とする関数をとり、p, qを適当にとってf_1の1における指数を$\mu+q'$, $q'\geqq 0$とする。1におけるもう1つの指数は$q\geqq 0$である。このとき$\mathfrak{F}$の0における指数はp, $\lambda+p'$, ∞における指数はν, ν'である。見掛けの特異点があれば、それらをb_1, b_2, ・・・, b_mとし、b_kにおける指数をr_k, r_k'とする。p, p', q, q', r_k, r_k'は0または正の整数であり、しかも$r_k'\geqq 2$とすることができる。

Fuchs の関係によれば

$$\begin{aligned} 1+m &= \lambda+\mu+\nu+\nu'+p+p'+q+q'+r_1+r_1'+\cdots+r_m+r_m' \\ &\geqq 1+2m \end{aligned}$$

これから

$$m=0, \quad p=p'=q=q'=0$$

を得るから、

$$\mathfrak{F} = P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \nu \\ \lambda & \mu & \nu' \end{Bmatrix}$$

である。

$f \in \mathfrak{F}$ は 0 において正則で、0 における値を 1 とすれば、

$$f(t) = F(\nu, \nu', 1-\lambda, t)$$

である。

$$f = rf_1 + sf_2$$

となる定数 r, s が存在し、

$$g = rg_1 + sg_2, \quad h = rh_1 + sh_2$$

とおけば、$g \in \mathcal{G}$, $h \in \mathcal{H}$ かつ

$$f = pg + qh$$

となる。

$$g(t) = F(\nu+1, \nu', 1-\lambda, t)$$

ととることができ、それに対して

$$h(t) = \varepsilon F(\nu, \nu'+1, 1-\lambda, t)$$

となる。h_1, h_2 を $\varepsilon^{-1}h_1$, $\varepsilon^{-1}h_2$ で置き換えることにより $\varepsilon = 1$ とすることができる。よって

$$F(\nu, \nu', 1-\lambda, t) = pF(\nu+1, \nu', 1-\lambda, t) + qF(\nu, \nu'+1, 1-\lambda, t)$$

が成り立つ。ここで記号をあらためて

$$F(a, b, c, t) = \alpha F(a+1, b, c, t) + \beta F(a, b+1, c, t)$$

と書くことができる。両辺の展開式の最初の２つの項を比べることにより，

$$1=\alpha+\beta,\qquad \frac{ab}{c}=\frac{(a+1)b}{c}\alpha+\frac{a(b+1)}{c}\beta$$

を得る。これから α，β を解いて上の式に入れることにより

$$(a-b)F(a,b,c,t)=aF(a+1,b,c,t)-bF(a,b+1,c,t)$$

を得る。

３．不確定特異点における回路行列

たとえば ∞ が１級の不確定特異点であるとしよう。∞ において２つの形式解

$$(3.1)\qquad e^{+x}x^{-\kappa}(c_0+c_1x^{-1}+\cdots),\quad (c_0\neq 0)$$

$$(3.2)\qquad e^{-x}x^{-\kappa'}(c_0'+c_1'x^{-1}+\cdots),\quad (c_0'\neq 0)$$

が存在する。このとき $+x$，$-x$ を特性多項式，κ，κ' を特性指数と呼ぶことにする。一般の場合には $\mathcal{F}$ の代りに $e^{\gamma x}\mathcal{F}$ をとり，$\xi=cx$ を独立変数にとることにより特性多項式が $\pm x$ の場合に帰着できるから，われわれの仮定は一般性をそこなうことにはならない。

D_k で角領域

$$|\arg x-k\pi|<3\pi/2,\qquad |x|>R$$

を，Δ_k で角領域

$$|\arg x-k\pi|<\pi/2,\qquad |x|>R$$

を表わす。いうまでもなく $D_k \supset \Delta_{k-1} \cup \Delta_k \cup \Delta_{k+1}$ である。

漸近展開の理論により次の事実が知られている。

k が奇数ならば Δ_k で（3.1）を漸近展開とする関数が $\mathfrak{F}$ の中に唯一つ存在し，その漸近展開は D_k において有効である；k が偶数ならば Δ_k で（3.2）を漸近展開とする関数が $\mathfrak{F}$ の中に唯一つ存在し、その漸近展開は D_k において有効である。

おのおのの k に対して唯一つに決まる $\mathfrak{F}$ の関数を φ_k とし、特に φ_0，φ_1 を考えることにしよう。$x \in \Delta_2$ に対応する Δ_0 の点を $\hat{x}$ とすれば、x と $\hat{x}$ は絶対値が等しく、偏角が 2π だけ違う。したがって

$$\hat{x}^{-\kappa} = e^{2\pi i\kappa} x^{-\kappa}$$

である。

$$\hat{\varphi}_1(x) = \varphi_1(\hat{x}) \sim e^{2\pi i\kappa - x} x^{-\kappa}(c_0 + c_1 x^{-1} + \cdots)$$

であるから、$\hat{\varphi}_1 - e^{2\pi i\kappa}\varphi_1$ は φ_0 に対して一次従属である。よって

$$\hat{\varphi}_1 = e^{2\pi i\kappa}\varphi_1 + \sigma\varphi_0$$

が成り立つ。ここで φ_1 の係数が特性指数 κ だけに依存していることに注意する必要がある。

φ_0，φ_1 をたてに並べた行列を Φ とする。∞ において f_1，$f_2 \in \mathfrak{F}$ に関する回路行列 Θ が対角行列であるように F を決めることができる。Θ の対角線要素を θ，θ' としよう：

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ c & \theta \end{bmatrix}$$

Φ と F の間には線型関係が存在するから、Φ＝PF と書くことができる。

$$P = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \quad \det P = 1$$

ならばΦに関する回路行列は

$$P\Theta P^{-1} = \begin{bmatrix} \theta\alpha\delta - \theta'\beta\gamma & (\theta'-\theta)\alpha\beta \\ (\theta-\theta')\gamma\delta & -\theta\beta\gamma+\theta'\alpha\delta \end{bmatrix}$$

である。ゆえに注意したように $\varepsilon = e^{2\pi i\kappa}$ と置けば

$$\theta\alpha\delta - \theta'\beta\gamma = \varepsilon$$

であり、これと $\det P=1$ とから $\alpha\delta$, $\beta\gamma$ の値が決まる。したがって $P\Theta P^{-1}$ の右下の要素も θ, θ', ε だけで決まる。c_0, c_0' を適当にとることにより $P\Theta P^{-1}$ の右上の要素の値を勝手に決めることができ、$\alpha\beta$ の値が決まれば $\gamma\delta$ の値も決まるから、このようにして回路行列 $P\Theta P^{-1}$ が決まる。

4. 有理的な線型関係が成り立つ条件

$\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ の特異点は確定特異点かまたは1級の不確定特異点であるとしよう。$\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ はモノドロミー群が一致し、したがって G, H に関する回路行列はすべての特異点において一致すると仮定する。このとき $\alpha g_1 + \beta g_2$ と $\alpha h_1 + \beta h_2$ を対応する

関数と呼ぶ。不確定特異点——たとえば∞とする——において開きが3πである角領域において漸近展開をゆるす$g \in \mathcal{G}$に対応する$\mathcal{H}$の関数hも同じ角領域で漸近展開をゆるし、特性多項式も一致するものとする。このとき前の結果により特性指数の差は整数である。

さて有理関数p, qに対して(1.1)が成り立つとしよう。$\mathcal{F}$のモノドロミー群が$\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$と一致することはいうまでもない。また不確定特異点においても$g \in \mathcal{G}$, $h \in \mathcal{H}$が対応する関数で開きが3πである角領域で漸近展開が成り立つとすれば、仮定によりその特性多項式も一致し、

$$f = pg + qh$$

も同様な漸近的な条件を満たすことは明らかである。逆にこの条件が満たされるならば(1.1)でp, qを定義したとき、p, qが∞のまわりで一価であるばかりでなく、漸近的な性質から∞において

$$p(x) \quad q(x) = O(|x|^N)$$

が成り立つようにNがとれる。したがって∞がp, qの特異点であるとしても、それは極であることが結論される。

5　合流型P関数の場合

たとえばBessel関数J_nを含む関数族

(5.1)
$$P\left\{\begin{array}{ccc} \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\quad\infty\quad}} & 0 \\ i & 1/2 & n \\ -i & 1/2 & -n \end{array}\right\}$$

を考えよう。(5.1)の関数の導関数からなる族を$\mathcal{G}$、また(5.1)の関数とx^{-1}の積からなる族を$\mathcal{H}$とする。

fで(5.1)の任意の関数を表わし、α, βを決まった値とし、$\alpha f' + \beta x^{-1} f$で表わされる関数からなる族を$\mathcal{F}$とすれば、$\mathcal{F}$の不確定特異点は$\infty$だけ、確定特異点は0だけである。$\infty$における特性多項式は$\pm ix$, 特性指数は$1/2+p$, $1/2+p'$(p, p'は0または正の整数)。0における指数は$n-1+q$, $1-n+q'$(q, q'は0または正の整数)となるようにα, βを決めることができる。Fuchs型の場合と同様にFuchsの関係により$\mathcal{F}$には見掛けの特異点がなく、p, p', q, q'は0であることがわかり、

$$\mathcal{F} = P\left\{\begin{array}{ccc} \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\quad\infty\quad}} & 0 \\ i & 1/2 & n-1 \\ -i & 1/2 & 1-n \end{array}\right\}$$

を得る。ゆえに

$$J_{n-1}(x) = \alpha J_n'(x) + \beta x^{-1} J_n(x)$$

が成り立つように定数α, βが決められる。

$$J_n(x)=\frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n-\frac{1}{\Gamma(n+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}+\cdots$$

であるから、展開式の最初の２つの項の係数を比べることにより

$$n\alpha+\beta=2n$$

$$(n+2)\alpha+\beta=2(n+1)$$

これから α，β を解いて $\alpha=1$，$\beta=n$ を得る。このようにして

$$J_{n-1}(x)=x^{-n}\frac{d}{dx}(x^nJ_n(x))$$

を得る。

$$J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)$$

のような漸化公式も同様な考えで簡単に導かれる。