数理解析研究所講究録
第132巻 1971年 63-77

xのベキの大きさで零に近づく解

東京都立大学
岩野 正宏

1. 不確定型特異点をもつ連立方程式

連立方程式

$$(A)\qquad x^{\sigma+1}y' = f(x,y,z), \qquad xz' = g(x,y,z)$$

において，σ は正の整数；x は複素独立変数；y と z とはともにスカラー；$f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ は

$$|x| \leqq \xi, \quad |y| \leqq d, \quad |z| \leqq d$$

において (x,y,z) の正則関数であり，しかも $f(0,0,0)=0$, $g(0,0,0)=0$.

さらに

仮定 I

$$\nu \equiv f_y(0,0,0) \neq 0$$

を仮定すれば，簡単な変換を行うことにより，

$$f_x(0,0,0)=0, \quad f_z(0,0,0)=0, \quad g_y(0,0,0)=0$$

が成り立つと仮定して一般性を失わない。さいごに

<u>仮定 II</u>

$$\mu \equiv g_z(0,0,0) \text{ の実部は 正.}$$

を仮定する.

形式変換に関する福原の理論（方法）を応用すれば，方程式 (A) は

$$(F) \quad y \sim \sum_q \Phi(x)^q A_q(x), \quad z \sim \sum_q \Phi(x)^q B_q(x)$$

の形の形式解をもつことが証明できる。ここで $A_q(x)$, $B_q(x)$ は x のベキ級数; $\Phi(x)$ は reduced equation

$$x v' = \mu v + c x^\mu$$

の一般解，したがって，C を任意定数として，$\Phi(x)$ の形は

$$\Phi(x) = C x^\mu \quad (c=0); \qquad \Phi(x) = x^\mu (C + c \log x) \ (c \neq 0).$$

$c \neq 0$ のときは，μ は正の整数であることが知られている.

著者は，(F) の係数 $A_q(x)$, $B_q(x)$ が x の解析関数であるように <u>すでに定められている</u> ものと仮定して，形式解 (F) は収束であることを，Funkcialaj Ekvacioj <u>12</u> (1969) 251-168 に証明した。実は この結果は，<u>$c \neq 0$ の場合</u> には少し修正しなければならないことが

わかった。

まず定理を述べる。

$\boxed{\text{定理}}$ $\underline{\Theta}$, $\overline{\Theta}$ は

$$\underline{\Theta}=\frac{1}{\sigma}\left(\arg\nu-\frac{5\pi}{2}\right)+\varepsilon,\quad \overline{\Theta}=\frac{1}{\sigma}\left(\arg\nu+\frac{\pi}{2}\right)-\varepsilon,$$

または

$$\underline{\Theta}=\frac{1}{\sigma}\left(\arg\nu-\frac{\pi}{2}\right)+\varepsilon,\quad \overline{\Theta}=\frac{1}{\sigma}\left(\arg\nu+\frac{5\pi}{2}\right)-\varepsilon$$

のどちらか一方を表わす。ε は十分小さい正の数

領域

$$(\mathrm{D})\qquad 0<|x|<\xi'',\quad \underline{\Theta}<\arg x<\overline{\Theta},\quad |v|<b''$$

において定義された関数 $Y(x,v)$, $Z(x,v)$ が存在し，次の条件を満足する：

i) $Y(x,v)$, $Z(x,v)$ は (x,v) の関数として (D) において正則.

ii) 一様収束な展開式

$$Y(x,v)=\sum_{g=0}^{\infty}v^{g}\,Y_g(x),\quad Z(x,v)=\sum_{g=0}^{\infty}v^{g}\,Z_g(x)$$

が成り立ち，係数は角領域

$$\underline{\Theta}<\arg x<\overline{\Theta},\qquad 0<|x|<\xi''$$

において正則，しかもこの角領域のなかから $x\to 0$

のとき，x のベキ級数

$$\overline{Y}_q(x) \simeq A_q(x), \qquad \overline{Z}_q(x) \simeq B_q(x)$$

に漸近展開される．（$A_q(x)$, $B_q(x)$ は (F) に現れたものと同じもの）。

iii）　$(x, \Phi(x))$ が 領域 (D) のなかにある限り，すなわち，不等式

$$0 < |x| < \rho'', \quad \underline{\Theta} < \arg x < \overline{\Theta}, \quad |\Phi(x)| < b''$$

を満足する限り，

$$y = Y(x, \Phi(x)), \quad z = Z(x, \Phi(x))$$

は方程式 (A) の 真の解 である。

この 定理 の証明の概略を つぎに述べる

2.　$c=0$ の場合．　定理の証明は前記の論文のままでよい。

形式解 (F) を，方程式 (A) の (y, z) の代わりに，置き換えれば $\{A_q \ B_q\}$ は 次の形の微分方程式を満足することがわかる：　すなわち，$\Phi(x)$ の $0, 1, \ , q$ 次の項の係数は等しい とおけば，

$$x^{\sigma+1}A_0' = f(x, A_0, B_0), \qquad xB_0' = g(x, A_0, B_0),$$

$$\begin{cases} x^{\sigma+1}A_q' = (J(x) - q\mu x^{\sigma})A_q + K(x)B_q + P_q(x), \\ xB_q' = L(x)A_q + (M(x) - q\mu)B_q + Q_q(x), \end{cases}$$

$$J(x) \equiv f_y(x, A_0(x), B_0(x)), \quad K(x) \equiv f_z(x, A_0(x), B_0(x)),$$

$$L(x) \equiv g_y(x, A_0(x), B_0(x)), \quad M(x) \equiv g_z(x, A_0(x), B_0(x))$$

$P_q(x)$, $Q_q(x)$ は $A_1(x), \dots, A_{q-1}(x)$, $B_1(x), \dots, B_{q-1}(x)$ およびこれらの導関数の多項式で，係数は $(A_0(x), B_0(x), x)$ の3変数の関数として $(0, 0, 0)$ の近傍において一価正則な関数である。したがって，逐次に $\{A_q(x), B_q(x)\}$ を，$q = 0, 1, \dots$ の順に決めていけば，$P_q(x)$, $Q_q(x)$ はともに既知関数と考えられる。さらに，これらの微分方程式は，形式解

$$(2.1)_q \qquad A_q \sim \sum_{l=0}^{\infty} P_{lq} x^l, \quad B_q \sim \sum_{l=0}^{\infty} Q_{lq} x^l$$

をもつこと，および $f_y(0, 0, 0) \neq 0$ に注意すれば，第1の方程式に存在定理を応用することによって，

領域

(2.2) $\underline{\Theta} < \arg x < \overline{\Theta}, \quad 0 < |x| < \xi'$

において一価正則 かつ べキ級数 $(2.1)_0$ に漸近展開可能な 解 が ただ一つ存在する。 これを $\{A_0(x), B_0(x)\}$ で表わす。 また $f(0,0,0) = g(0,0,0) = 0$ を仮定しているから,

$$P_{00} = 0, \quad Q_{00} = 0$$

である。したがって

$$\lim_{x \to 0} A_0(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0} B_0(x) = 0.$$

ゆえに

$$\lim_{x \to 0} J(x) \neq 0, \quad \lim_{x \to 0} K(x) = 0.$$

ふたたび 存在定理を 応用すれば, 次の結論を得る:

(F) の形の形式解において, 係数 $\{A_\ell(x), B_\ell(x)\}$ は 非線型 $(\ell = 0)$ または 線型 $(\ell \neq 0)$ 方程式の解として 逐次に しかも 一意的に定められる。このとき 各係数 は 角領域 (2.2) において 一価正則 しかも このなかから $x \to 0$ のとき 形式級数 $(2.1)_\ell$ に漸近展開可能 である (そのような解がただ一つ存在するとき,

漸近展開は一意的であるという).

形式解(F)の収束の証明は，前記の論文に展開された通りにできる。$\overline{Y}_{\xi}(x)=A_{\xi}(x)$, $\overline{Z}_{\xi}(x)=B_{\xi}(x)$ とおけばよい。

3. <u>$c\neq 0$ の場合.</u> まえと同じ方法を応用してみる。$c\neq 0$ であるから，

$$x\Phi'(x)=\mu\Phi(x)+cx^{\mu}$$

となることを注意する．(F)を(A)に代入して，$\Phi(x)$ の 0 次の項，すなわち $\Phi(x)$ に無関係な項の係数は等しいとおくことにより，連立方程式

$$\begin{cases} x^{\sigma+1}A_0'=f(x,A_0,B_0)-cx^{\mu+\sigma}A_1, \\ xB_0'=g(x,A_0,B_0)-cx^{\mu}B_1 \end{cases}$$

を得る。この連立方程式は，係数 $\{A_0(x),B_0(x)\}$ を決めることを期待されているが，方程式の右辺にもう一組の未知数 $\{A_1,B_1\}$ を含んでいる。同じような不都合は，$\{A_1(x),B_1(x)\}$ を定義することを期待される方程式において，あらたに一組の未知数 $\{A_2,B_2\}$ が含まれているという理由から生ずる 以下同様．したがって(F)の形の

形式級数を考えても，その各係数はただ形式的な意味しかもたないから，級数(F)自身の解析的意味を調べることはできない！

そこで(F)の代わりに，(F)を x のベキ級数に形式的に並べかえて得られる新しい形式解

$$(F') \quad y \sim \sum_{l=0}^{\infty} x^l a_l(\Phi(x)), \quad z \sim \sum_{l=0}^{\infty} x^l b_l(\Phi(x))$$

を考える．$(2.1)_q$ を考慮すれば，$a_l(v)$, $b_l(v)$ は

$$(3.1)_l \quad a_l(v) \sim \sum_{q=0}^{\infty} P_{lq} v^q, \quad b_l(v) \sim \sum_{q=0}^{\infty} Q_{lq} v^q$$

の形の形式ベキ級数であらわされる．

方程式(A)の $\{y, z\}$ の代りに (F') の右辺を代入する．x^0, x^1, $\ldots$, x^l, $\ldots$ の項の係数をそれぞれ等しいとおけば次の形の方程式を得る：

$$f(0, a_0, b_0) = 0, \quad \mu v \frac{db_0}{dv} = g(0, a_0, b_0),$$

$$\begin{cases} E(v) a_l + F(v) b_l = S_l(v), \\ \mu v \dfrac{d b_l}{dv} = G(v) a_l + (H(v) - l) b_l + T_l(v), \end{cases}$$

$$E(v)=f_y(0,a_0(v),b_0(v)),\quad F(v)=f_z(0,a_0(v),b_0(v)),$$

$$G(v)=g_y(0,a_0(v),b_0(v)),\quad H(v)=g_z(0,a_0(v),b_0(v)),$$

$S_\ell(v)$, $T_\ell(v)$ は $a_1(v),\ldots,a_{\ell-1}(v)$, $b_1(v),\ldots,b_{\ell-1}(v)$ および これらの導関数の 多項式で, 各係数は $(a_0(v), b_0(v), v)$ の 3変数の関数として $(0,0,0)$ の近傍で 一価正則 である。上記の方程式 は すべて 形式解として $(3,1)_\ell$ の形の v のベキ級数 であらわされるものを もっている ことを 注意しておく。

$f_y(0,0,0)\neq 0$, $f_z(0,0,0)=0$ であると仮定されてあるから, 第1の微分方程式の はじめの式から a_0 を解いて

$$a_0=U(b_0),\qquad U(0)=0.$$

ここで $U(b_0)$ は $b_0=0$ において一価正則. あとの式の a_0 の代りに $U(b_0)$ を代入して,

$$\mu v\frac{db_0}{dv}=g(0,U(b_0),b_0)=\hat{g}(b_0),\quad \hat{g}(0)=0$$

を得る。$\hat{g}(b_0)$ は $b_0=0$ の近傍で一価正則. 形式解として v のベキ級数の形のものをもつから, Briot-Bouquet 理論から, この形式級数 は 0 でない収束半径をも

ち その和 $b_0(v)$ は $v=0$ の近傍で一価正則な解となる。$a_0(v)\equiv \overline{U}(b_0(v))$ もまた $v=0$ で一価正則。かくして，第1の方程式は $v=0$ の近傍 $|v|<b'$ において一価正則な解 $\{a_0(v),\ b_0(v)\}$ をもつ。$\hat{g}(0)=0,\ \overline{U}(0)=0$ より，$a_0(0)=0,\ b_0(0)=0.$

$f_y(0,0,0)\neq 0$ より，$E(v)$ および $E(v)^{-1}$ はともに $|v|<b'$ において一価正則であると仮定しても一般性を失わない。同じような議論を，第2，…以下の方程式に応用すれば，次の結果を得る：

(F') の形の形式解を考えると，係数 $\{a_\ell(v),\ b_\ell(v)\}$ は非線型 $(\ell=0)$ または線型 $(\ell\neq 0)$ 方程式の解として，逐次に，$v=0$ の近傍 $|v|<b'$ において一価正則な関数であるように定められる。

(F') は形式解として意味をもつから，(F') 自身の解析的な意味を調べることができる。前記の論文において，形式解

$$y\sim\sum_{\ell=0}^{\infty}\Phi(x)^{\ell}A_\ell(x),\qquad z\sim\sum_{\ell=0}^{\infty}\Phi(x)^{\ell}B_\ell(x)$$

の代りに，形式解

$$y\sim\sum_{\ell=0}^{\infty}x^{\ell}a_\ell(\Phi(x)),\quad z\sim\sum_{\ell=0}^{\infty}x^{\ell}b_\ell(\Phi(x))$$

を考え，全く同じ推論を行う．次の定理を証明することができる．

領域 (D) において一価正則な関数 $Y(x,v)$, $Z(x,v)$ が存在し，次の性質をもつ．

α) $Y(x,v)$, $Z(x,v)$ は $x\to 0$, $\underline{\Theta}<\arg x<\overline{\Theta}$ のとき，一様に漸近展開

$$Y(x,v)\sim\sum_{l=0}^{\infty}x^l a_l(v),\quad Z(x,v)\sim\sum_{l=0}^{\infty}x^l b_l(v)$$

が成り立つ，すなわち任意の自然数 N に対して v に無関係に

$$\left|\,Y(x,v)-\sum_{l=0}^{N-1}x^l a_l(v)\right| = O(x^N).$$

β) $(x,\Phi(x))$ の値が不等式

$$0<|x|<\xi'',\quad \underline{\Theta}<\arg x<\overline{\Theta},\quad |\Phi(x)|<b''$$

を満足する限り，

$$y=Y(x,\Phi(x)),\quad z=Z(x,\Phi(x))$$

は方程式 (A) の解である．

この定理が証明できれば最初の定理は次のようにして証明される．まず $Y(x,v)$, $Z(x,v)$ は $v=0$ におい

て 一価正則であるから, Cauchy の積分定理により

$$Y(x,v)=\sum_{q=0}^{\infty} v^{q}\,\bar{Y}_q(x),\quad Z(x,v)=\sum_{q=0}^{\infty} v^{q}\,\bar{Z}_q(x),$$

ここで

$$\bar{Y}_q(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|v|=b''}\frac{Y(x,v)}{v^{q+1}}\,dv\ .$$

$Y(x,v)$, $Z(x,v)$ は (D) の閉包

$$\text{①}\leqq \arg x\leqq \text{⑪},\ 0\leqq |x|\leqq \xi'';\quad |v|\leqq b''$$

において 連続であると 仮定してよい. 一方, $a_l(v)$ は $v=0$ で一価正則であるから, Cauchy の積分定理により

$$P_{lq}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|v|=b''}\frac{a_l(v)}{v^{q+1}}\,dv\ .$$

ゆえに

$$\bar{Y}_q(x)-\sum_{l=0}^{N-1}x^{l}P_{lq}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|v|=b''}\frac{Y(x,v)-\sum_{l=0}^{N-1}x^{l}a_l(v)}{v^{q+1}}\,dv,$$

$Y(x,v)$ の x のベキ級数への漸近展開は v について一様であるから, この右辺 の 被積分関数の大きさは

$O(x^N)\cdot v^{-1-\varepsilon}$ となる. ゆえに

$$\left|\bar{Y}_q(x)-\sum_{l=0}^{N-1}x^l P_{lq}\right|=O(|x|^N).$$

N は任意であったから, この不等式は漸近展開

$$\bar{Y}_q(x)\simeq\sum_{l=0}^{\infty}x^l P_{lq}$$

が成り立つことを示す。すなわち $\bar{Y}_q(x)$ の漸近展開と, $A_q(x)$ のそれとは一致する。

<u>4. ベクトル方程式への拡張</u> 方程式(A)に対する定理は, y および z がベクトルの場合に拡張される:

$$(B)\quad x\,1_m(x^\sigma)\,y'=f(x,y,z),\qquad xz'=g(x,y,z)$$

$$1_m(x^\sigma)=\mathrm{diag}\{x^{\sigma_1},x^{\sigma_2},\ ,x^{\sigma_m}\}.$$

$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m$ はすべて正の整数; y は m 次, z は n 次のベクトル; f は m 次, g は n 次のベクトル関数で各成分は複素 x, y, z 平面の $m+n+1$ 次元複素空間の原点の近傍で一価正則かつ

$$f(0,0,0)=0,\qquad g(0,0,0)=0.$$

仮定Iの代りに

仮定1 関数行列式

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)\right) \neq 0.$$

もしくは 行列$(\partial f/\partial y(0,0,0))$ の固有値 $\nu_1,\dots,\nu_m$ はすべて 零 と異なる.

この行列を $\mathfrak{A}$ とかけば, もし必要であれば変換

$$\begin{cases} y = Y - \mathfrak{A}^{-1} f_z(0) Z - \mathfrak{A}^{-1} f_x(0) x, \\ z = x^{\sigma} \mathfrak{A}^{-1} g_y(0) Y + Z \end{cases}$$

を行うことにより,

$$f_z(0,0,0) = 0, \quad f_x(0,0,0) = 0, \quad g_y(0,0,0) = 0$$

と仮定して一般性を失わない. 仮定II に対応して.

仮定2. 行列

$$\frac{\partial g}{\partial z}(0,0,0)$$

の固有値 $\mu_1,\dots,\mu_n$ の実部はすべて正.

これらの仮定のもとに, 同じような定理が得られる. ただし $\Phi(x)$ は n 次のベクトルで その k 成分 $\Phi_k(x)$

$$\Phi_k(x) = x^{\mu_k}\left\{C_k + (C_1, \dots, C_{k-1}, \log x \text{ の多項式})\right\}.$$

とくに，$C_1 = \cdots = C_n = 0$ のとき，$\Phi(x) \equiv 0$ のときは，

$$y = \sum_{\xi} \Phi(x)^{\xi} A_{\xi}(x), \quad z = \sum_{\xi} \Phi(x)^{\xi} B_{\xi}(x)$$

の形に展開できる収束な解の存在がすでに証明されている．展開式の有効な範囲は

$$\underline{\Theta} < \arg x < \overline{\Theta}, \quad 0 < |x| < \xi'', \quad \|\Phi(x)\| < b''$$

の形であらわされる．ただし $\|\ \|$ は maximum norm，$\underline{\Theta} < \arg x < \overline{\Theta}$ は，すべての番号 j にたいして

$$\left|\arg(-\gamma_j) - \sigma_j \arg x\right| < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon'$$

$\varepsilon' > 0$ 十分小

が同時になりたつような最大の角領域．しかもこの角領域のなかに，$x \to 0$ のとき指数関数

$$\exp\left(\mathrm{Re}\,\frac{\gamma_j}{\sigma_j x^{\sigma_j}}\right)$$

が ∞ となるような x の方向が含まれていることを仮定しなければならない．