数理解析研究所講究録
第133巻 1972年 59-69

ある種の2次的作用素とその応用

広大 理　　小林 貞一

§1. 序

Steenrod の reduced power operations に対して成立するカップ積公式を2次的コホモロジー作用素に対して考察する問題については, J. Adem [1], [2], O. Valdivia [8], L. Kristensen [4], [5], R. J. Milgram [6], E. Thomas [7] などが研究している。[1], [2], [8] では functional operations が [4], [5] では cochain operations が用いられる。[4], [5], [6], [8] は, Z_2 係数の場合の考察である。以後 p を奇素数とし, Z_p を位数 p の巡回群とする。

$\mathcal{P}^i$ を ith mod p reduced power operation, Δ を完全系列 $0 \longrightarrow Z_p \longrightarrow Z_{p^2} \longrightarrow Z_p \longrightarrow 0$ に associate された mod p Bockstein operation とする。目的は, コホモロジー類 u, v のカップ積 $u \cup v$ に対する $\mathcal{P}^i$ あるいは Δ の値を求める公式

$$\mathcal{P}^k(u \cup v) = \sum_{i=0}^{k} \mathcal{P}^i u \cup \mathcal{P}^{k-i} v \qquad (\text{Cartan formula})$$

$$\Delta(u \cup v) = \Delta u \cup v + (-1)^{\dim u} u \cup \Delta v$$

を，1次的作用素の Kernel を定義域としてもち，1次的作用素の Cokernel を値域としてもつところの2次的作用素の場合に考えることである。すなわち，問題は，安定2次的作用素 Φ が与えられたとき，適当な条件を満たす u，v に対し

$$\Phi(u \cup v) \equiv \sum \Phi'(u) \cup \Phi''(v)$$

なる1次的又は2次的作用素 Φ'，Φ'' を求めよということである。このような公式が存在することは，L. Kristensen，R. J. Milgram，E. Thomas などによって確立された。([4]の主定理及び例は incorrect である由)。しかし，具体的に Φ'，Φ'' を求める問題は，Φ を与える都度考える必要がある。

2次的作用素に関するカップ積公式について最初に得られたのは，J. Adem [2] による次の結果である。

定理(1.1) (J. Adem)「$R(s)$ を，Δ，$\mathcal{P}^i$ $(i = 0, 1, \cdots, p^s)$ によって生成された free associative algebra over Z_p とし，$R^+(s)$ を，Δ，$\mathcal{P}^i$ $(i = 1, \cdots, p^s)$ によって生成された $R(s)$ のイデアルとする。Φ を degree $r+1$ の関係式

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_k \varphi_k = 0 \quad (\theta_k \in R^+(s), \quad \varphi_k \in R^+(s))$$

で定まる安定2次的作用素とする。$u \in H^l(X; Z_p)$, $v \in H^m(X; Z_p)$ ($l > 0$, $m > 0$) を, $R^+(s) \cdot u = 0$, $R^+(s) \cdot v = 0$ なる元とすれば, $\Phi(u)$, $\Phi(v)$, $\Phi(u \cup v)$ が定義されて,

$$\Phi(u \cup v) \equiv \Phi(u) \cup v + (-1)^{lr} u \cup \Phi(v)$$

modulo $f^* H^{l+m+r}(K(Z_p, l) \times K(Z_p, m); Z_p) + \sum_{k=1}^{n} \theta_k H^{l+m+t_k-1}(X; Z_p)$ $\quad (t_k = \text{degree } \varphi_k)$

が成り立つ。ただし, $f : X \longrightarrow K(Z_p, l) \times K(Z_p, m)$ は g^*(fundamental class) $= u$ なる写像 $g : X \rightarrow K(Z_p, l)$ 及び h^*(fundamental class) $= v$ なる写像 $h : X \longrightarrow K(Z_p, m)$ を用いて $f = (g, h)$ で与えられる。」

この定理(1.1)は, 一般の Adem 関係式に対して成立するものであるが, u, v に課せられた条件が強いので, 使えない場合が多い。そこで, Adem 関係式を具体的に与えて, より詳しい結論を得ようと試みた。その内の結果の一つは次である。

Φ_i $(i > 1)$ を degree $2(p-1)i + 1$ の Adem 関係式

$$(1.2) \quad \wp^1\Delta\wp^{i-1} - (i-1)\Delta\wp^i - \wp^i\Delta = 0$$

に associate された安定2次的作用素とする。Φ_i は，各空間 X 及び各整数 $q>0$ に対し，準同型対応

$$\Phi_i : K^q(\Phi_i ; X) \longrightarrow H^{q+2(p-1)i}(X ; Z_p) / Q^{q+2(p-1)i}(\Phi_i ; X)$$

である。ここに，

$$K^q(\Phi_i ; X) = \left\{ u \in H^q(X ; Z_p) \,\middle|\, \wp^{i-1}u = 0,\ \wp^i u = 0,\ \Delta u = 0 \right\},$$

$$Q^{q+2(p-1)i}(\Phi_i ; X) = \wp^1\Delta H^{q+2(p-1)(i-1)-1}(X ; Z_p)$$
$$-(i-1)\Delta H^{q+2(p-1)i-1}(X ; Z_p) - \wp^i H^q(X ; Z_p)$$

である。このとき，

定理(1.3)「k，j を $0<j<k$ なる整数とする。元 $u \in H^l(X ; Z_p)$，$v \in H^m(X ; Z_p)$ ($l>0$, $m>0$) を integral classes の mod p reductions とする。もし $j<i \leqq k$ なるすべての i に対し $\Phi_i(u)$ が定義され，$0 \leqq i < j$ なるすべての i に対し $\Phi_{k-i}(v)$ が定義されるならば，$\Phi_k(u \cup v)$ も定義されて次が成立つ。

$$\Phi_k(u \cup v) \equiv \sum_{i=j+1}^{k} \left(\Phi_i(u) \cup \wp^{k-i} v \right) + \sum_{i=0}^{j-1} \left(\wp^i u \cup \Phi_{k-i}(v) \right)$$

modulo some indeterminacy Q 」

§2. 定理 (1.3) の証明

2次的作用素を関数的作用素によって表わす Peterson-Stein の第2公式により，結果は次に述べる (2.1) の証明に帰着される。

与えられた Adem 関係式 (1.2) を次の形で表わしておく。

$$\alpha_i \beta_i = 0 \qquad (i > 1)$$

ただし，$\alpha_i = \mathcal{P}^1\Delta - (i-1)\Delta - \mathcal{P}^i$，　$\beta_i = (\mathcal{P}^{i-1}, \mathcal{P}^i, \Delta)$ とする。(これらの記号は，$\alpha_i(x, y, z) = \mathcal{P}^1\Delta x - (i-1)\Delta y - \mathcal{P}^i z$，$\beta_i(w) = (\mathcal{P}^{i-1}w, \mathcal{P}^i w, \Delta w)$ を意味する。)

(2.1) 「$f : X \longrightarrow Y$ を連続写像とし，$c \in H^l(Y; Z_p)$，$d \in H^m(Y; Z_p)$ $(l > 0,\ m > 0)$ を次の条件を満たす元とする。

$$\begin{cases} \Delta c = 0, & \Delta d = 0 \\ f^*\mathcal{P}^i c = 0 & (j \leqq i \leqq k) \\ f^*\mathcal{P}^{k-i} d = 0 & (0 \leqq i \leqq j) \end{cases}$$

このとき，下の両辺における関数的作用素が定義されて

$$(\alpha_k)_f\, \beta_k(c \cup d) \equiv \sum_{i=j+1}^{k} \{((\alpha_i)_f\, \beta_i(c)) \cup \mathcal{P}^{k-i} f^* d\} + \sum_{i=0}^{j-1} \{\mathcal{P}^i f^* c \cup ((\alpha_{k-i})_f\, \beta_{k-i}(d))\}$$

(modulo some indeterminacy Q) が成立つ。」

まず，(2.1) を証明する。右辺が定義されることは，仮定から明らかである。左辺については，仮定及び Cartan formula より，$\alpha_k \beta_k (c \cup d) = 0$，$f^* \beta_k (c \cup d) = (f^* \mathcal{P}^{k-1}(c \cup d), f^* \mathcal{P}^k (c \cup d), f^* \Delta (c \cup d)) = 0$ が得られるから，やはり well-defined である。写像 $f : X \longrightarrow Y$ は，包含写像と考えてよい。仮定より，元

$$x_i \in H^{l+2(p-1)i}(Y, X ; Z_p) \quad \text{such that} \quad j^* x_i = \mathcal{P}^i c$$

$$y_{k-i} \in H^{m+2(p-1)(k-i)}(Y, X ; Z_p) \quad \text{such that} \quad j^* y_{k-i} = \mathcal{P}^{k-i} d$$

が存在する。(ただし，$j : Y \to (Y, X)$ は包含写像。)

$$y = \mathcal{P}^1 \Delta \left\{ \sum_{i=j+1}^{k} (x_{i-1} \cup \mathcal{P}^{k-i} d) + \sum_{i=0}^{j-1} (\mathcal{P}^i c \cup y_{k-i-1}) \right\}$$

$$- (k-1) \left\{ \sum_{i=j+1}^{k} (x_i \cup \mathcal{P}^{k-i} d) + \sum_{i=0}^{j} (\mathcal{P}^i c \cup y_{k-i}) \right\}$$

とおくと，$j^* y = 0$ が示されるから，$\delta((\alpha_k)_f \beta_k (c \cup d)) = y$ を得る。ここに，δ は対(Y, X)のコホモロジー完全系列のコバウンダリーである。一方，計算により，

$$y = \sum_{i=j+1}^{k} \left\{ (\mathcal{P}^1 \Delta x_{i-1} - (i-1) \Delta x_i) \cup \mathcal{P}^{k-i} d \right\}$$

$$+ (-1)^l \sum_{i=0}^{j-1} \left\{ \mathcal{P}^i c \cup (\mathcal{P}^1 \Delta y_{k-i-1} - (k-i-1) \Delta y_{k-i}) \right\}$$

となるから,

$$\delta\left[\sum_{i=j+1}^{k}\left\{((\alpha_i)_f\beta_i(c))\cup f^*\mathcal{P}^{k-i}d\right\}+\sum_{i=0}^{j-1}\left\{f^*\mathcal{P}^i c\cup((\alpha_{k-i})_f\beta_{k-i}(d))\right\}\right]$$

$$=\sum_{i=j+1}^{k}\left\{\delta((\alpha_i)_f\beta_i(c))\cup\mathcal{P}^{k-i}d\right\}+(-1)^{\ell}\sum_{i=0}^{j-1}\left\{\mathcal{P}^i c\cup\delta((\alpha_{k-i})_f\beta_{k-i}(d))\right\}$$

$$= y$$

が得られる。これは求める式を意味する。indeterminacy は,証明の中に現れる indeterminacy をすべて合せたものである。

次に, (2.1) から定理 (1.3) を導く。$\gamma\in H^{\ell}(K(Z,\ell);Z_p)$, $\kappa\in H^m(K(Z,m);Z_p)$ を fundamental classes の mod p reductions とする。$g:X\longrightarrow K(Z,\ell)$, $h:X\longrightarrow K(Z,m)$ を $g^*\gamma=u$, $h^*\kappa=v$ なる写像とし, $f:X\longrightarrow K(Z,\ell)\times K(Z,m)$ を, $f=(g,h)$ により定義する。このとき, $f^*(\gamma\times 1)=g^*\gamma=u$, $f^*(1\times\kappa)=h^*\kappa=v$, $f^*(\gamma\times\kappa)=f^*((\gamma\times 1)\cup(1\times\kappa))=u\cup v$ である。$Y=K(Z,\ell)\times K(Z,m)$, $c=\gamma\times 1$, $d=1\times\kappa$ とおき, Peterson-Stein の第2公式 $\Phi_i(f^*(\gamma\times 1))\equiv-(\alpha_i)_f\beta_i(\gamma\times 1)$ etc. を用いれば, 定理 (1.3) が得られる。

§3. 応用例

CP^{∞} を無限次元複素射影空間とし, $z\in H^2(CP^{\infty};Z_p)$

$\cong Z_p$ を生成元とする。

(3. 1) 「$l = Np^{s+1}$, $m = p^s - p^t$, $k = p^s$ $(0 < t < s, N > 0)$ ならば, indeterminacy 0 で

$$\Phi_k(z^{l+m}) = \sum_{i=2}^{k} (\Phi_i(z^l) \cup \wp^{k-i} z^m)$$

$$\Phi_i(z^l) = N\,\Phi_i(z^{p^{s+1}}) \cup z^{l-p^{s+1}} \qquad (1 < i \leqq k)」$$

が得られるので, $\Phi_k(z^{l+m})$ の計算は, $\Phi_i(z^{p^{s+1}})$ の計算に帰着される。例えば, $p = 3$ のとき,

(3. 2) 「$k = 3^s$ $(s > 0)$ に対し

$$\Phi_i(z^{3k}) = \begin{cases} \pm z^{5k} & i = k \\ 0 & 1 < i < k \end{cases}」$$

が証明されるので, 上の $\Phi_k(z^{l+m})$ は, (符号を除いて)計算される。

更に, double secondary operations を計算することにより, レンズ空間上のベクトルバンドルの cross sections の問題や, immersion の問題にも適用され, 次の結果が得られる。

(3. 3) 「$r - 1 > s > t > 1$, $n = 2\cdot 3^s + 3^t - 1$ とする。η を mod 3 レンズ空間 $L^n(3) = S^{2n+1}/Z_3$ 上の canonical complex line bundle の real 化とする。このとき, $(3^r - n - 1)\eta$ は, $2\cdot 3^r + 3^t - 3n$ 個の独立な cross sections をもたない。」

(3. 4) 「$s > t > 1$, $n = 2\cdot 3^s + 3^t - 1$ とする。このとき, $L^n(3)$ は, R^{3n-3^t-1} の中に immerse されない。」

(3. 1)－(3. 4) の証明は, 〔3〕参照。

§4. 注意.

定理 (1. 3)の系として, 次が得られる。

(4. 1) 「$u \in H^l(X\,;\,Z_p)$, $v \in H^m(X\,;\,Z_p)$ ($l > 0$, $m > 0$) が更に

$$\mathcal{P}^i u = 0 \qquad (1 \leqq i \leqq k)$$

$$\mathcal{P}^i v = 0 \qquad (1 \leqq i \leqq k)$$

を満足するならば, 下の両辺の2次的作用素が定義されて,

$$\Phi_k(u \cup v) \equiv \Phi_k(u) \cup v + u \cup \Phi_k(v)$$

(modulo the indeterminacy) が成立つ。」

これは, Adem の結果 (1. 1)から得られるものと一致する。

E. Thomas [7] は, Adem 関係式 (1. 2) に associate された安定2次的作用素 Φ_i に対する別のカップ積公式を与えている。

定理 (4. 2) (E. Thomas) 「$\mathcal{P}^{p-1}\mathcal{P}^1 = 0$ に associate された安定2次的作用素を Φ とする。u, v を

$$\Delta u = 0, \quad \mathcal{P}^1 u = 0, \quad \mathcal{P}^p u = 0,$$

$$\Delta v = 0, \quad \mathcal{P}^p v = 0$$

なる元とすると，下の両辺における２次的作用素が定義され

$$\Phi_{p+1}(u \cup v) \equiv \Phi_{p+1}(u) \cup v + (-1)^{\dim u} u \cup \Phi_{p+1}(v)$$

$$- (-1)^{\dim u} \Psi(u) \cup \Delta \mathcal{P}^1 v + \sum_{n=1}^{p-1} \Phi_{n+1}(u) \cup \mathcal{P}^{p-n}(v)$$

(modulo the common indeterminacy) が成立つ。」

§5. 文献

[1] J. Adem, Sobre la formula del producto para operaciones cohomologicas de segundo orden, Bol. Soc. Mat. Mexicana, 4 (1959), 42-65.

[2] ———, Sobre operaciones cohomologicas secundarias, ibid. 7 (1962), 95-110.

[3] T. Kobayashi, On some secondary cohomology operations, Hiroshima Math. J., 1 (1971), 41-73.

[4] L. Kristensen, On a Cartan formula for secondary cohomology operations, Math. Scand. 16 (1965), 97-115.

[5] ———, On secondary cohomology operations II, Conference on Algebraic Topology, The University of Illinois at Chicago Circle, 1968, 117-133.

[6] R. J. Milgram, Cartan formulae (to appear).

[7] E. Thomas, Whitney-Cartan product formulas, Math. Zeit., 118 (1970), 115-138.

[8] O. Valdivia, Algebras de Hopf y formulas del producto, Bol. Soc. Mat. Mexicana 12 (1967), 1-31.