数理解析研究所講究録
第133巻 1972年 78-84

$V(n)$について

京大理　　戸田宏

Spectrum $V(n)$については, Topology 10 (1971) pp. 53−65 に, その存在について若干の結果をのべた. またその attaching map として之られる写像(ホモトピー類) α, β, γ 等の性質については京大紀要の最近号に議論したところである. βから定義される β-series $\{\beta_t \in {}^p\pi_{(tp-t-1)q-2}\}$ が $p \geq 5$ で 0でないことは, L. Smith によって証明されている.

以上のような背景の下に, 現在持っている話題としては次のようなものがある.

(i) γ-series について, 特に $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 \neq 0$.

(ii) $V(n)$を利用して, 球面のホモトピー群のp-成分 ${}^p\pi_*$を決定すること. 特に(i)の結果が本質的な役割を果して $* \fallingdotseq 2p^2q$ 付近まで求めることができる.

(iii) $V(n)$に似た spectrum.

今回は主として(iii)の話題についてのべる

$V(n)$ は

$$H^*(V(n), Z_p) \cong \Lambda(Q_0, Q_1, \cdots, Q_n), \quad Q_{i+1} = [P^{p^i}, Q_i]$$

で規定されるものであるが，その存在は $V(1)$ については $p \geq 3$ のとき，$V(2)$ については $p \geq 5$，$V(3)$ については $p \geq 7$ のときに保証されている．また $p=3$ のときには $V(2)$ は存在せず，$p=5$ のときは $V(3)$ は多分存在しないであろうと思われる．この $p=3$ のときの $V(2)$ の非存在性は β-series が $p=3$ で定義出来ずし．Smith の結果が適用されないこととして現われると共に，(ii) のように $V(n)$ より ${}^p\pi$ を逆算することにも障碍となっている．そこで $p=3$ のときに $V(2)$ に代るべきものを考えようというのが (iii) の趣旨である．

一般に $V(n)$ の特徴として，その ~~coho~~ ホモロジーおよびホモトピーが共に比較的簡単であることが挙げられる．たとえば $p \geq 5$，$\deg < p^2q - 3$ $(q = 2p-2)$ のとき

$$\pi_*(V(n)) = \{1, h_0, h_1, g_0, g_0, k_0 h_0\} \otimes Z_p[\beta_1]$$

となる．ここで $Z_p[\beta_1]$ の項を消去出来ればホモトピー群は更に簡単となる．それは次の様にして実行される．

$$B = S^0 \cup_{\beta_1} e^{pq-1}$$

を β_1 の写像錐とし，$VB(2) = B \wedge V(2)$ とおけば

$$\Sigma^{pq-2} V(2) \xrightarrow{\beta_1 \wedge 1} V(2) \longrightarrow VB(2)$$

なる cofibering の誘導する完全系列

$$\cdots \longrightarrow \pi_{*-pq+2}(V(2)) \xrightarrow{(\beta_1 \wedge 1)_*} \pi_*(V(2)) \longrightarrow \pi_*(VB(2)) \longrightarrow \cdots$$

において，$(\beta_1 \wedge 1)_*(\xi) = (\beta_1 \wedge 1) \circ (1 \wedge \xi) = \beta_1 \wedge \xi$ $= (1 \wedge \xi) \circ (\beta_1 \wedge 1) = \xi \circ \beta_1$ すなわち $(\beta_1 \wedge 1)_* = \beta_1^*$ となり，上の $\pi_*(V(2))$ の構造から $\deg < p^2 q - 3$ のとき

$$\pi_*(VB(2)) = \{1, h_0, h_1, g_0, k_0, k_0 h_0\}$$

となり，H^* は多少複雑となるが，π_* は更に簡単となる．このようなことは $VB(3) = B \wedge V(3)$ $(p \geq 7)$ でも考えられ，この $VB(3)$ のホモトピー群がわかれば，それから $VB(2)$, $VB(1)$, $VB(0)$, B, S^0 の順にホモトピー群をしらべていくことによって，球面のホモトピー群への一つのアプローチが与えられる．$\pi_*(B)$ は $\pi_*(S^0)$ の既知の部分から計算しても，α-series に関する部分を除くと可なり簡単であり，また β-series に関する構造は特異なものがある．

さて、今回の第1目標は（$VB(1) = B \wedge V(1)$）

定理 「$p=3$ のとき次のような $VB(2)$ が存在する

(i) $H^*(VB(2);Z_p) = H^*(B;Z_p) \otimes \Lambda(Q_0, Q_1, Q_2)$

(ii) cofibering $\Sigma^{16} VB(1) \longrightarrow VB(1) \longrightarrow VB(2)$ がある。

$p=5$ についても同様な性質をもつ $VB(3)$ が存在する。」

証明の前に次の二つを注意する。

(a) $V(1\frac{1}{4})$ が存在する。

(b) B は multiplication をもつ。

実際、(a) については $V(1\frac{1}{2})$ の存在が知られているのでその skeleton として $V(1\frac{1}{4})$ が得られ、それはある写像

$$\beta_0 : S^{16} \longrightarrow V(1)$$

の写像錐である。

次に (b) については、multiplication $\mu : B \wedge B \rightarrow B$ の存在に対する障碍は $B \wedge B$ の top cell e^{22} の attaching map $\partial e_{22} \in \pi_{21}(B \wedge S^0 \cup S^0 \wedge B)$ の μ による像である。μ の誘導する $\bar{\mu} : B \wedge B / S^0 \wedge S^0 \rightarrow B / S^0$ で考えればこの障碍は 0 であることは、一般の偶数-stem の元の写像錐について成立することである。従って障害は $\pi_{21}(S^0)$ よりの像となる。$\pi_{21}(S^0)$ の 3-成分は 0 であるから、∂e_{22}

が3-成分にあること，特に $9(\partial e_{22})=0$ をいえば十分である．$3\beta_1=0$ より，top cell の degree が3である写像 $S^{11}\longrightarrow B$ がある．その約結 $S^{22}\longrightarrow B\wedge B$ を考えるとその degree は9である．これは $9(\partial e_{22})=0$ を示しているから (b) は証明された．

さて $p=3$ のとき $V(1)$ は multiplication をもたないが

(c) $VB(1)=B\wedge V(1)$ は multiplication をもつ．

これはつぎの (c') からえられる．

(c') multiplication $V(1)\wedge V(1)\xrightarrow{\mu'} VB(1)$ がある．

$V(1)\wedge V(1)=(V(1)\wedge S^0\cup S^0\wedge V(1))\cup e^2\cup e_1^6\cup e_2^6\cup e_1^7\cup e_2^7\cup e^{10}\cup e_1^{11}\cup e_2^{11}\cup e^{12}$ であるから，μ' の存在に対する障害は $\pi_k(VB(1))$, $k=1,5,6,9,10,11$ にある．一方 $\deg<16$ では前の $\pi_*(VB(2))$ $(p\geq 5)$ のときと同様に

$$\pi_*(VB(1))=\{1,h_0,h_1\}\quad \deg h_0=3,\ \deg h_1=11$$

がなりたつ．故に唯一の障害は h_1 であるが，h_1 が $\mathcal{P}^3$ で detect されることから，μ' が存在しなければ $V(1)\wedge V(1)$ において $\mathcal{P}^3\neq 0$ となる．これは Cartan 公式に反する．よって (c') が証明された．(c) は次のように合成を考えればよい．

$$VB(1)\wedge VB(1)\xrightarrow{1\wedge T\wedge 1} B\wedge B\wedge V(1)\wedge V(1)\xrightarrow{\mu_B\wedge\mu'} B\wedge B\wedge V(1)$$
$$\xrightarrow{\mu_B\wedge 1} B\wedge V(1)=VB(1)$$

最後に，定理の $VB(2)$ は次の合成の写像錐として得られる.

$$S^{16} \wedge VB(1) \xrightarrow{\beta_0 \wedge 1} V(1) \wedge VB(1) \subset VB(1) \wedge VB(1) \xrightarrow{\mu} VB(1)$$

定理の性質は容易にたしかめられる.

$p=5$ のときは，(a) を $V(2\frac{1}{8})$ の存在に，β_0 を $\gamma_0 : S^{248} \longrightarrow V(2)$ におきかえる．また (c),(c') では $VB(1), V(1)$ をそれぞれ $VB(2), V(2)$ におきかえる．このとき μ' の存在に対する障害が 0 であることは，単に前あの $\pi_*(VB(2))$ の結果において degree をしらべることによって得られる.

定理が証明された後は，$VB(2)$ (または $VB(3)$) をどのように利用するかということになるが，一つは前にのべたホモトピー群の計算である。これには $\pi_*(VB(\ ))$ を高次元まで計算するために Adams のスペクトル系列の d_2 をうまくおめる方法が必要である．もう一つは $p=3$ において存在しなかった β-series に代るものとして，次のような $\bar{\beta}$-series をしらべることが面白い．定理の cofibering を

$$\bar{\beta} : \Sigma^{16} VB(1) \longrightarrow VB(1)$$

とかき，$\bar{\beta}_t \in \pi_{16t-6}(B)$ を次の合成で定義する

$$S^{16t} \hookrightarrow \Sigma^{16} VB(1) \xrightarrow{\bar{\beta}^t} VB(1) \xrightarrow{proj.} \Sigma^6 B = S^6 \cup_{\beta_1} e^{17}.$$

こゝで，L. Smith の方法で次の予想が証明されることを期待したい．

予想　$\bar{\beta}_t \neq 0$.　$(t \geq 2)$.

随分面倒ではあるが，直接 $\bar{\beta}_t \neq 0$ を $t=2,3,4$ でたしかめることができる．$\bar{\beta}_2$，$\bar{\beta}_3$ はともに $\pi_*(S^0)$ からの像で，その原像として β_2，β_3 なる元を考えることができる．また $\bar{\beta}_4$ は $\pi_*(S^0)$ よりの像ではなく，射影 $B \to S''$ によって $\pm\varepsilon_1\beta_1$ なる元へ写されるものである．

以上中途半端な報告であるが，$p=3$ における β-series が，$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ までが精々で，β_4 に相当する次元では $\pi_*(S^0)$ の 3-成分が 0 であって β_4 が定義し得ない事情を他の側面からたしかめられたように思われる．