数理解析研究所講究録
第134巻 1972年 99-103



# 局所凸空間における半群の生成について

東京都立大学　理学部
大内　忠

局所凸空間における半群の生成を T. Komura [2] とは異なった方法で、より簡単な形で与える。

X を locally convex sequentially complete Hausdorff space とする。L(X) を X から X への continuous linear map の全体とする。

定義 $\{T_t ; t \geq 0\} \subset L(X)$ が、次の(i)〜(iii) を満たす時半群と呼ばれる。

(i) $T_{t+s} = T_t T_s \quad (t, s \geq 0)$

(ii) $T_0 = I$

(iii) $\lim_{t \to s} T_t x = T_s x \quad$ for $\forall x \in X$

$T_t$ の生成作用素 A を

$\lim_{h \downarrow 0} \frac{T_h - I}{h} x$ が存在するような x に対して、その極限でもって $Ax$ を定義する。

半群 $T_t$ が equicontinuous とは 任意の連続セミノルム $p$ に対して ある連続セミノルム $q$ があって

$$\sup_{0\leq t<\infty} p(T_t x) \leq q(x)$$ が成りたつことである。

また半群 $T_t$ が locally equicontinuous とは

$$\sup_{0\leq t<s} p(T_t x) \leq q(x)$$ が成りたつこと、すなわち compact interval 上で同等連続なことである。

equicontinuous semi-groups に対しては L. Schwartz [3] H. Komatsu [1], K. Yosida [4] の結果があり、生成作用素 A の resolvent をもちいて半群を構成しており、本質的には Banach space と同様の技法が用いられている。

locally equicontinuous semi-groups に対しては Banach space の時の技法が A の resolvent が必しも存在しないため用いられず、T. Kimura [2] において、この難点を generalized resolvent を用いて切り抜けている。

しかし、彼女の方法はまだ簡単とは思えないし、generalized resolvent なる概念は複雑であるように思われる。 ここにおいては、別の概念 ( asymptotic resolvent ) を導入することにより、より簡易化しよう。

定義 $\{R(\lambda)\ ;\ \lambda > \omega\} \subset L(X)$ が次の条件 (i)〜(iii) を満たす時 $A$ の漸近的レゾルヴェントといわれる

(i) $\forall x \in X \quad R(\lambda)x$ は $C^\infty$ function

(ii) $R(\lambda)X \subset D(A) \qquad R(\lambda)R(\mu) = R(\mu)R(\lambda)$

$R(\lambda)A = AR(\lambda)$

(iii) $R(\lambda)(\lambda - A) = (\lambda - A)R(\lambda) = I + S(\lambda)$

ここで $S(\lambda) \in L(X)$ でかつ，任意の連続 semi norm $p$ に対し，ある連続 semi norm $q$ があり，ある $a > 0$ に対して

$$p\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}S(\lambda)x\right) \leq a^k e^{-a\lambda} q(x)$$

を満たす。

さて locally equicontinuous semi groups に対する Hille-Yosida の定理は次の形で述べられる。

定理 $A$ が locally equicontinuous semi group の生成作用素であるための必要十分条件は

(i) $A$ は densely defined closed operator

(ii) $A$ は漸近的レゾルベント $R(\lambda)$ をもち

$$\left\{ \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda)\ ;\ \lambda > \omega,\ n = 0, 1, 2 \ldots \right\}$$ が

equicontinuous.

Remarks

(i) $T_t$ が equicontinuous の時は $S(\lambda)\equiv 0$，また locally equicontinuous の時は，例えば $S(\lambda)=e^{-a\lambda}S$ $(S\in L(X))$ ととれる。他にも $S(\lambda)$ のとり方はいろいろある。

(ii) $A$ から $T_t$ を構成する時は，逆 Laplace 変換を用いず，Yosida 近似的方法で作る。従って，実軸上た∞に発散する点においてのみ漸近的レゾルヴェントが存在することが必要かつ十分であるように formulate できる。（もちろん，漸近的レゾルベントの定義を少し変えねばならないが）

(iii) 漸近的レゾルヴェントの概念を用いて，今迄半群について知られている公式，例えば exponential formula などは，いいかえができる。

詳細は，いずれどこかに発表する予定である。

## References

[1] H. Komatsu. Semi-groups of operators in locally convex spaces. J. Math. Soc. Japan 16 (1964) 230−262

[2]. T. Komura. Semi-groups of operators in locally convex spaces. J. Functional Analysis 2. (1968) 258−296.

[3] L. Schwartz. Lectures on mixed problems in partial differential equations and the representation of semi groups. Tata institute of Fundamental Research 1958

[4] K. Yosida. Functional Analysis. Springer, Berlin, 1965.