数理解析研究所講究録
第135巻 1972年 15-24

コンパクト複素部分多様体の極大族について

東北大 理　　難波 誠

§1　序

$r+d$ 次元の複素多様体 W とその d 次元コンパクト複素部分多様体 V が与えられているとする。W の有限個の開部分集合 $\{W_i\}_{i\in I}$ で V を覆っておき、各 W_i が座標系

$$(w_i, z_i) = (w_i^1, \cdots, w_i^r, z_i^1, \cdots, z_i^d)$$

を持ち、その中で V が方程式 $w_i = 0$ で定義されるようにしておく。$U_i = W_i \cap V$ とおく。

$$\begin{cases} w_i = f_{ik}(w_k, z_k) \\ z_i = g_{ik}(w_k, z_k) \end{cases}$$

を $W_i \cap W_k$ における座標変換の式とする。ここに f_{ik}, g_{ik} は vector valued holomorphic functions である。行列函数 F_{ik} を

$$F_{ik}(z_k) = \left(\frac{\partial f_{ik}}{\partial w_k}\right)(0, z_k) \qquad \text{for } z_k \in U_i \cap U_k$$

で定義すると、次ぎの関係式が得られる。

$$F_{ij}(z_j) \cdot F_{jk}(z_k) = F_{ik}(z_k) \quad \text{for } z_k \in U_i \cap U_j \cap U_k,\ z_j = g_{jk}(0, z_k).$$

これより，holomorphic vector bundle $F=\{F_{ik}\}$ が定義される。これを，<u>normal bundle of V in W</u> と呼ぶ。

さて，V の十分近くに，他のコンパクト部分多様体 V' を考え，V' が W_i の中で方程式 $w_i=\varphi_i(z_i)$ で与えられているものとする。ここに，φ_i は vector valued holomorphic function である。φ_i は次ぎの適合条件を満たさねばならない。

$$f_{ik}(\varphi_k(z_k), z_k) = \varphi_i(g_{ik}(\varphi_k(z_k), z_k)) \quad \text{for } z_k \in U_i \cap U_k.$$

我々は，このような V' の族を考察する。

<u>定義</u> T を複素解析空間，$0 \in T$ を reference point とする。各点 $t \in T$ に対し V に近い W のコンパクト部分多様体 V_t を対応させ，とくに $V_0=V$ とする。この system $\{V_t\}_{t\in T}$ が <u>V を中心とする W のコンパクト部分多様体の族</u>であるとは，V_t が W_i の中で，方程式 $w_i=\varphi_i(z_i, t)$ で与えられていることである。ここに $\varphi_i(z_i, t)$ は (z_i, t) に関する vector valued holomorphic function である。

<u>定義</u> $\{V_t\}_{t\in T}$ を V を中心とする W のコンパクト部分多様体の族とする。この族が $0 \in T$ で<u>極大である</u>とは，任意の V を中心とする族 $\{V_s\}_{s\in S}$，$V_{s_0}=V$ に対し，s_0 の近傍 U と U から T への holomorphic map f が存在して，$f(s_0)=0$ 及び

$$V_s = V_{f(s)} \quad \text{for all } s \in U$$

をみたすことである。各点で極大な族を<u>極大族</u>と言う。

定理(Kodaira [3]) $H^1(V,\tilde{F})=0$ ならば、Vを中心とする極大族が存在する。しかもparameter space Tは複素多様体にとれる。ここに$\tilde{F}$はFの切断のsheaf。

我々の目的は、この定理の条件をはずすことである。しかし、その時はTは特異点を持ち得る。すなわち

定理　VをWの複素コンパクト部分多様体とする時、Vを中心とするWのコンパクト部分多様体の極大族が存在する。

この仕事は　講演者の1971年Columbia大学Ph.D. Thesisの主要部分である。講演者のadvisorは倉西正武先生である。倉西先生には、数多くのお教え、助言をいただいた。この仕事は、倉西先生の複素構造の完備族の存在証明([5]または[6])と類似している。

§2　いくつかの補題

V, Wを上のとうりとする。Vの開被覆$\{W_i\}_{i\in I}$の各元W_iの座標系(w_i, z_i)がW_iの外に少し拡げられるとし、その中でW_iは

$$W_i=\{(w_i,z_i)\mid |w_i|<1\ ,\ |z_i|<1\}$$

となっているとする。ここに$|w_i|=\sup_\alpha |w_i^\alpha|$など。つぎに、$e$を$0<e<1$となる十分小さな数で

$$U_i^e=\{(0,z_i)\mid |z_i|<1-e\}$$

が再びVの被覆になっているものとする。

$C^p = C^p(V, \{U_i\}, \tilde{F})$ を p-th cochain group of $\tilde{F}$ on the nerve of the covering $\{U_i\}$ とする。各元 $\xi \in C^p$ に対し

$$\|\xi\| = \sup\{|\xi^\lambda_{i_0\cdots i_p}(z)| : \lambda = 1, \cdots, r, (i_0 \cdots i_p) \in I^{p+1}, z \in U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}\}$$

とおく。ここに $\xi^\lambda_{i_0\cdots i_p}$ は ξ の (w_{i_0}, z_{i_0}) 座標系による表現。

$$C^p(\|\ \|) = \{\xi \in C^p \mid \|\xi\| < +\infty\}$$

とおくと $C^p(\|\ \|)$ は Banach space となり coboundary map δ は $C^p(\|\ \|)$ から $C^{p+1}(\|\ \|)$ の中への continuous linear map となる。

技術的理由により C^p に他の norm $|\ |_e$ を入れる。

$$|\xi|_e = \sup\{|\xi^\lambda_{i_0\cdots i_p}(z)| : \lambda = 1, \cdots, r, (i_0 \cdots i_p) \in I^{p+1}, z \in U^e_{i_0} \cap \cdots \cap U^e_{i_{p-1}} \cap U_{i_p}\}$$

ただし $\xi \in C^0$ に対しては $|\xi|_e = \|\xi\|$ とする。

$$C^p(|\ |_e) = \{\xi \in C^p \mid |\xi|_e < +\infty\}$$

とおくと $C^p(|\ |_e)$ は必ずしも Banach space にはならないが δ は $C^p(|\ |_e)$ から $C^{p+1}(|\ |_e)$ の中への continuous linear map となる。

$$Z^p = \{\xi \in C^p \mid \delta\xi = 0\}$$
$$B^p = \delta C^{p-1}$$
$$H^p = Z^p / B^p$$

とおくと H^p は Leray の定理より $H^p(V, \tilde{F})$ と自然に同型になる。

$$Z^p(\|\ \|) = \{\xi \in C^p(\|\ \|) \mid \delta\xi = 0\}$$
$$B^p(\|\ \|) = B^p \cap C^p(\|\ \|)$$

$$H^p(\|\ \|) = Z^p(\|\ \|)/B^p(\|\ \|)$$

とおく。同様に

$$Z^p(\ |_e) = \{\xi \in C^p(\ |_e) \mid \delta\xi = 0\}$$

$$B^p(\ |_e) = B^p \cap C^p(\ |_e)$$

$$H^p(\ |_e) = Z^p(\ |_e)/B^p(\ |_e)$$

とおく。この時.以下の補題が得られる。

<u>補題1</u>. H^p, $H^p(\|\ \|)$ 及び $H^p(\ |_e)$ は自然に同型である。

<u>補題2</u>. $Z^1(\ |_e) = Z^1(\|\ \|)$。 $B^1(\ |_e) = B^1(\|\ \|)$。

補題1は容易である。補題2は.各点 $z \in U_i \cap U_k$ に対し.ある j があって $z \in U_j^e$ な事より得られる。

<u>補題3</u> (Kuranishi [4]). $E: B^2(\ |_e) \longrightarrow C^1(\ |_e)$ なる continuous linear map E で $\delta \circ E = \text{identity on } B^2(\ |_e)$ なるものが存在する。

かゝる E を用いて. $\Lambda = 1 - E\delta$ とおくと.

$$\Lambda: C^1(\ |_e) \longrightarrow Z^1(\ |_e)$$

は projection となる。補題3の証明をまねて.

<u>補題4</u>. $E_0: B^1(\ |_e) \longrightarrow C^0(\ |_e)$ なる continuous linear map E_0 で $\delta E_0 = \text{identity on } B^1(\ |_e)$ なるものが存在する。

補題4及び Montel の定理を使って.

<u>補題5</u>. $B^1(\|\ \|) = \delta C^0(\|\ \|)$ であって.これは $Z^1(\|\ \|)$ の中で閉じている。

補題5より，$Z^1(\|\ \|)$の部分空間$H^1(\|\ \|)$で

$$Z^1(\|\ \|) = B^1(\|\ \|) \oplus H^1(\|\ \|)$$

となるものが存在する。$H^1(\|\ \|) \cong H^1$である。

$$B : Z^1(\|\ \|) \longrightarrow B^1(\|\ \|)$$

$$H : Z^1(\|\ \|) \longrightarrow H^1(\|\ \|)$$

をそれぞれへのprojectionとする。

§3. 定理の証明

W, V, $\{W_i\}$, (w_i, z_i)等は上のとうりとする。Vの近くにあるWのコンパクト複素部分多様体V'がW_iの中で方程式

$$w_i = \varphi_i(z_i)$$

で与えられているものとする。すると，V'に対して

$$\varphi = \{\varphi_i\} \in B_1 \subset C^0(\|\ \|)$$

なるφが対応させられる。ここにB_1はBanach space $C^0(\|\ \|)$のunit ballである。$\varphi = \{\varphi_i\}$は適合条件

$$\varphi_i(g_{ik}(\varphi_k(z_k), z_k)) = f_{ik}(\varphi_k(z_k), z_k) \quad \text{for } z_k \in U_i \cap U_k$$

を満たす。逆に，この条件を満たす$\varphi \in B_1$は方程式$w_i = \varphi_i(z_i)$によってWの部分多様体V_φを定義している。そこで，問題はかかる適合条件を満たす$\varphi \in B_1$の集合の解析である。

補題6. $K : B_1 \longrightarrow \overline{C^1(\|\ \|_\varepsilon)}$なるmapを

$$K\varphi = \{(K\varphi)_{ik}\}, \quad (K\varphi)_{ik}(z_k) = \varphi_i(g_{ik}(\varphi_k(z_k), z_k)) - f_{ik}(\varphi_k(z_k), z_k)$$

で定義すると．Kは0の近傍で analytic map で

$$K'(0) = -\delta。$$

εを十分小さな正数．B_εを$C^0(\| \ \|)$のε-ball とし．KはB_εで analyticだとする。補題6より

$$M = \{\varphi \in B_\varepsilon \mid K\varphi = 0\}$$

はB_εの Banach subvariety である。これが有限次元である事を証明する。

$$L : B_\varepsilon \longrightarrow C^0(\| \ \|)$$

なる map を

$$L\varphi = \varphi - E_0 B \wedge K\varphi - E_0\delta\varphi$$

で定義すると．Lは analytic map で

$$L'(0) = \text{identity}$$

となる。Inverse mapping theoremより．$\exists \varepsilon'$：小さい正数．$\exists L^{-1} = \Phi : B_{\varepsilon'} \longrightarrow B_\varepsilon$。

<u>補題7</u>．$\varphi \in M$ならば$L\varphi \in H^0 = H^0(V, \tilde{F})$。

なぜなら$\delta L\varphi = \delta\varphi - 0 - \delta E_0 \delta\varphi = \delta\varphi - \delta\varphi = 0$。さて．

$$\Omega = B_{\varepsilon'} \cap H^0$$

$$S = \{s \in \Omega \mid K\Phi(s) = 0\}$$

とおく。MはLによるSの像とみれるので．SがΩの~~(有限次元)~~ subvariety となることを言えばよい。

$$s \in \Omega \subset H^0$$

とし．$\varphi = \Phi(s)$ とおく。

$$s = L\varphi = \varphi - E_0 B \wedge K\varphi - E_0 \delta\varphi$$

故に．$0 = \delta s = \delta\varphi - B\wedge K\varphi - \delta\varphi = -B\wedge K\Phi(s)$。

そこで

$$K\Phi(s) = B\wedge K\Phi(s) + H\wedge K\Phi(s) + E\delta K\Phi(s)$$
$$= \qquad H\wedge K\Phi(s) + E\delta K\Phi(s)$$

ここに．$H\wedge K\Phi : \Omega \longrightarrow H^1(V, \tilde{F})$ とみれる。

補題8．$S = \{ s \in \Omega \mid H\wedge K\Phi(s) = 0 \}$．

この補題より．S は Ω の analytic subvariety である。

各点 $s \in S$ に対し $V_s = V_{\Phi(s)}$ とおくと．$\{V_s\}$ なる族が得られ．この族が極大な事も容易に証明される。特に $H^1(V, \tilde{F}) = 0$ とおくと．$S = \Omega$ となり．S は多様体になる。これが．Kodaira の case である。

§4．注意と応用。

以上は．あくまでも局所的な議論であるが．W のコンパクト複素部分多様体全体の集合に．上で作った analytic space S を local chart として 大域的な analytic space の構造を入れることが出来る。この analytic space は Douady space ([1]) の open subset をなしていると考えられる。

次ぎに．上の方法を用いることにより．W のコンパクト複

素部分多様体のpair (V_1, V_2)で$V_1 \supset V_2$となる全体がanalytic spaceとなる事が証明される。

また. 上の方法を用いる事により. ordinary singularitiesを持ったsurfacesの極大族([2])の存在も証明出来る。

文 献

1. Douady, A., Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 16, 1 (1966), 1–95.
2. Kodaira, K., A theorem of completeness for analytic systems of surfaces with ordinary singularities, Ann. of Math., 74 (1961), 591–627.
3. Kodaira, K., A theorem of completeness of characteristic systems for analytic families of compact submanifolds of complex manifolds, Ann. of Math., (2) 75 (1962), 146–162.
4. Kuranishi, M., On the locally complete families of complex analytic structures, Ann. of Math., 75 (1962), 536–577.
5. Kuranishi, M., New proof for the existence of locally complete families of complex structures, in Proc. Conf. on Complex Analysis, Minneapolis, 1964, Springer Verlag, N.Y., 1965.
6. Kuranishi, M., Lectures on deformations of complex

structures on compact complex manifolds, Proc. of the international seminar on deformation theory and global analysis, University of Montreal, Montreal, 1969.