数理解析研究所講究録
第 136 巻 1972 年 154-165

Intermediate space における補間定理と Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式.

阪大 基礎工 小泉澄之

§1. Introduction.

(R, μ), (S, ν) は totally σ-finite measure space とする. T は R の上の可測函数を S の上の可測函数に移す変換とする

T が quasi-linear とは.

(i) Tf_1, Tf_2 が定義されるならば, $T(f_1+f_2)$ もまた一意に定義されて

$$|T(f_1+f_2)| \leq K(|Tf_1|+|Tf_2|)$$

— K は f_1, f_2 に indep. な正の定数, ≥ 1 — が成立する

(ii) Tf が定義されるならば, c をスカラーとして, $T(cf)$ も一意に定義されて,

$$|T(cf)| = |c|\,|Tf|$$

が成立つ.

$L_a(R, \mu)$ は Lebesgue space. すなわち, f は R の上で定義された μ-可測函数で, 次の積分

$$\|f\|_{a,\mu} = \left(\int_R |f|^a d\mu\right)^{\frac{1}{a}} < \infty$$

が存在するような函数 f の作る空間とする.

T が type (a, b) であるとは, 各 $f \in L_a(R, \mu)$ に対して $\hat{f} = Tf$ は $L_b(S, \nu)$ に属し,

$$\|\tilde{f}\|_{b,\nu} \leqq M \|f\|_{a,\mu}$$

— M は f に indep. な定数である — が成り立つことをいう。この不等式が成り立つような最小の M を作用素 T の (a,b)-norm という。

T は weak type (a,b) であるとは、($1 \leqq b < \infty$ として)、任意に与えられた正数 $y > 0$ に対して、$E_y = \{x \mid |\tilde{f}(x)| > y\}$ とするとき、

$$\nu(E_y[\tilde{f}]) \leqq \left(\frac{M}{y} \|f\|_{a,\mu} \right)^b$$

— M は f に indep. な定数である — が成り立つことをいう。上の不等式が成り立つような最小の M を作用素 T の弱 (a,b)-norm という。

$b = \infty$ のとき weak type (a,∞) は type (a,∞) と同一と定義し、両者の間を区別しない。

吾々は前に、次の定理を証明した。

<u>Theorem</u>. a quasi-linear operation T が weak type (1,1) かつ、type (p,p), $p > 1$ とする。このとき、次の関係式が成り立つ。

$$\int_{|Tf| \leqq 1} |Tf|^p \, d\nu + \int_{|Tf| > 1} |Tf| \, d\nu$$

$$\leqq K \left\{ \int_{|f| \leqq 1} |f|^p \, d\mu + \int_{|f| > 1} |f| (1 + \log |f|) \, d\mu \right\}$$

—K は f に indep. かつ，M_0, M_1, p にのみ dep. する定数である．ここで，M_0, M_1 は，それぞれ 弱 $(1,1)$-norm, (p,p)-norm である．See. S. Koizumi [2].

この定理は Calderon-Zygmund 型の singular integral operator に対して応用される．しかしながら．Hardy-Littlewood-Sobolev の fractional integral (or potential operator) には適用出来ない．See. A. Zygmund [5].

$$\tilde{f}_\lambda(x) = P.V. \int_{E_n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n\lambda}} dy$$

これは．weak type $(1, \frac{1}{\lambda})$, type (r,s). ここに

$$1 < r < s < \infty, \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{s} = 1 - \lambda \quad (0 < \lambda < 1)$$

である．そこで 次の定理を証明する．

<u>Theorem 1</u> a quasi-linear operation T が weak type (a_1, b_1), type (a_2, b_2) とする．ここに $\frac{1}{a_i} = \alpha_i$, $\frac{1}{b_i} = \beta_i$ $(i = 1, 2)$ として．点 (α_i, β_i) $(i = 1, 2)$ は三角形領域 Δ : $0 < \beta \leqq \alpha \leqq 1$ に属し．$\alpha_1 > \alpha_2$, $\beta_1 > \beta_2$ — 従って $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$ — とする．このとき

$$\int_{|Tf| \leqq 1} |Tf|^{b_2} + \int_{|Tf| > 1} |Tf|^{b_1} d\nu$$

$$\leqq K \left\{ \left(\int_{|f| \leqq 1} |f|^{a_2} d\mu \right)^{b_2} + \left(\int_{|f| > 1} |f|^{a_1} (\log |f|)^{1/k_1} d\mu \right) + \right.$$

$$+ \left(\int_{|f|>1} |f|^{a_1} d\mu \right)^{\kappa_1+\kappa_2} \Big\}.$$

— K は f に indep. operation T の norms M_1, M_2, a_i, e_i にのみ dep. する定数 — が成立つ。ここに $\kappa_i = \frac{e_i}{a_i}$ $(i=1,2)$ とする。

この定理を H-L-S- 積分に応用して、

Corollary 1 H-L-S-operator $\tilde{f}_\lambda(x)$ において、次の不等式が成立する。

$$\int_{|\tilde{f}_\lambda|\leqq 1} |\tilde{f}_\lambda|^s dx + \int_{|\tilde{f}_\lambda|>1} |\tilde{f}_\lambda|^{\frac{1}{\lambda}} dx$$

$$\leqq K \Big\{ \left(\int_{|f|\leqq 1} |f|^r dx \right)^{\frac{s}{r}} + \left(\int_{|f|>1} |f| dx \right)^{\frac{1}{\lambda}+\frac{s}{r}} + \left(\int_{|f|>1} |f| (\log|f|)^{\lambda} dx \right)^{\frac{1}{\lambda}} \Big\}.$$

— K は f に indep. で r, s, λ, operation の norm M_1, M_2 にのみ dep. する定数である。

§2. Proof of Theorem 1.

$$f = g + h, \quad g = \begin{cases} f & \text{if } |f| \leqq 1 \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

と分解する。T は type (a_2, e_2) だから、

(1) $$\left(\int_S |Tg|^{b_2} d\nu \right)^{\frac{1}{b_2}} \leqq M_2 \left(\int_R |g|^{a_2} d\mu \right)^{\frac{1}{a_2}} = M_2 \left(\int_{|f|\leqq 1} |f|^{a_2} d\mu \right)^{\frac{1}{a_2}}$$

T は weak type (a_1, b_1) だから $|Tf|$ の分布函数を $n(y)$ として，

$$\int_{|Tf|\leqq 1} |Tf|^{b_2}\, d\nu = -n(1) + b_2 \int_0^1 y^{b_2-1} n(y)\, dy$$

$$< b_2 \int_0^1 \left(\frac{M_1}{y} \|f\|_{a_1} \right)^{b_1} y^{b_2-1}\, dy$$

$$= b_2 \left(M_1 \|f\|_{a_1}\right)^{b_1} \int_0^1 y^{b_2-b_1-1}\, dy$$

(2) $$\int_{|Tf|\leqq 1} |Tf|^{b_2} d\nu = \frac{b_2}{b_2-b_1} M_1^{b_1} \left(\int_{|f|>1} |f|^{a_1} d\mu \right)^{\frac{b_1}{a_1}}$$

次に，$f = f_1 + f_2$，$f_2 = f$ if $|f| \leqq z$

$\qquad\qquad\qquad\qquad e^{i\arg f} z$, if $|f| > z$

と分解する。このとき，$|f| = |f_1| + |f_2|$ であって，$|Tf|$，$|Tf_i|$ の分布函数を $n(y)$，$n_i(y)$ $(i=1,2)$ および $|f|$，$|f_i|$ のそれらを $m(y)$，$m_i(y)$ $(i=1,2)$ とかくことにすると，

$$n(y) \leqq n_1\left(\frac{y}{2K}\right) + n_2\left(\frac{y}{2K}\right)$$

$$\leqq M_1^{b_1} \left(\frac{y}{2K}\right)^{-b_1} \|f_1\|_{a_1}^{b_1} + M_2^{b_2} \left(\frac{y}{2K}\right)^{-b_2} \|f\|_{a_2}^{b_2}$$

$m_2(y) = m(1)$ $0<y\leqq 1$; $= m(y)$，$1<y<z$; $= 0$，$y \geqq z$: $m_1(y) = m(y+z)$，$y>0$ だから

$$\int_{|Tf|>1} |Tf|^{b_1} d\nu = -\int_1^\infty y^{b_1}\, dn(y) .$$

$$= -y^{b_1} n(y) \Big|_{y=1}^{y=\infty} + b_1 \int_1^\infty y^{b_1-1} m(y)\, dy$$

$$= m(1) \cdot + b_1 \int_1^\infty y^{b_1 - 1} m(y)\, dy$$

ここで，まず

$$m(1) \leqq (M_1 \|h\|_{a_1})^{b_1} = M_1^{b_1} \Big(\int_{|f|>1} |f|^{a_1} d\mu \Big)^{\frac{b_1}{a_1}}$$

次に

$$b_1 \int_1^\infty y^{b_1 - 1} m(y)\, dy$$

$$\leqq b_1 (2K)^{b_2} M_2^{b_2} \int_1^\infty y^{b_2 - b_1 - 1} \Big(\int |h_2|^{a_2} d\mu \Big)^{\frac{b_2}{a_2}} + b_1 (2K)^{b_1} M_1^{b_1} \int_1^\infty y^{-1} \Big(\int |h_1|^{a_1} d\mu \Big)^{\frac{b_1}{a_1}} dy$$

$$= b_1 (2K)^{b_2} M_2^{b_2} I_2 + b_1 (2K)^{b_1} M_1^{b_1} I_1 \quad \text{say}$$

$$I_2 = \int_1^\infty y^{b_2 - b_1 - 1} \Big(-\int_0^\infty t^{a_2} dm_2(t) \Big)^{\kappa_2} dy, \qquad \kappa_2 = \frac{b_2}{a_2}$$

$$= \int_1^\infty y^{b_2 - b_1 - 1} \Big(-t^{a_2} m(t) \Big|_{t=1}^{t=z} + a_2 \int_1^z t^{a_2 - 1} m(t)\, dt \Big)^{\kappa_2} dt$$

$$\leqq 2^{\kappa_2} \int_1^\infty y^{b_2 - b_1 - 1} m(1)^{\kappa_2} dy + 2^{\kappa_2} \int_1^\infty y^{b_2 - b_1 - 1} \Big(\int_1^z t^{a_2 - 1} m(t)\, dt \Big) dy$$

$$= 2^{\kappa_2} (I_{21} + I_{22}), \ \text{say.}$$

$$I_{21} = (b_2 - b_1)^{-1} m(1)^{\kappa_2}$$

$$I_{22}^{1/\kappa_2} = \sup_{\chi} \int_1^\infty y^{b_2 - b_1 - 1} \Big(\int_1^z t^{a_2 - 1} m(t)\, dt \Big) \chi(y)\, dy,$$

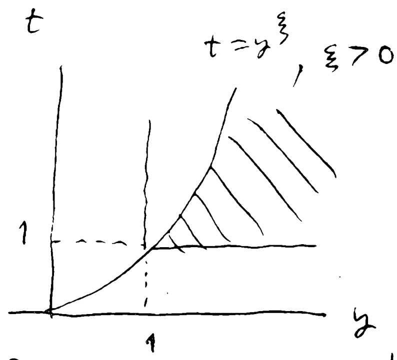
ここで $\chi(y)$ は，

$$\int_1^\infty y^{b_2 - b_1 - 1} \chi^{\kappa_1'}(y)\, dy \leqq 1$$

を満足するもの族とする。

$z = y^{\xi}$, $\xi > 0$ とおいて —— ξは後で定める ——.

$$\int_1^{\infty} y^{b_2-b_1-1} \left\{ \int_1^{z} t^{a_2-1} m(t)\, dt \right\} \chi(y)\, dy$$



$$= \int_1^{\infty} t^{a_2-1} m(t) \left\{ \int_{t^{1/\xi}}^{\infty} y^{b_2-b_1-1} \chi(y)\, dy \right\} dt$$

$$= \int_1^{\infty} t^{a_2-1} m(t)\, dt \left\{ \int_{t^{1/\xi}}^{\infty} y^{b_2-b_1-1} \chi(y)\, dy \right\}^{1/\alpha_2} \left\{ \int_{t^{1/\xi}}^{\infty} y^{b_2-b_1-1} \chi^{\alpha_2'}(y)\, dy \right\}^{1/\alpha_2'}$$

$$\leqq (b_2-b_1)^{-1/\alpha_2} \int_1^{\infty} t^{a_2-1+\frac{b_2-b_1}{\alpha_2 \xi}} m(t)\, dt$$

ここで, $a_2 - 1 + \dfrac{b_1-b_2}{\alpha_2 \xi} = a_1 - 1$ とおいて, ξについて解くと,

$$\xi = \frac{b_1-b_2}{\alpha_2(a_2-a_1)} = \frac{a_2(b_2-b_1)}{b_2(a_2-a_1)} > 0$$

これを代入して,

$$I_2 \leqq 2^{\alpha_2}(b_2-b_1)^{-1} \left\{ \int m(1)^{\alpha_2} + \left(\int_1^{\infty} t^{a_1-1} m(t)\, dt \right)^{\alpha_2} \right\}$$

$$\leqq 2^{\alpha_2}(b_2-b_1)^{-1} \left\{ a_1 m(1) + \int_1^{\infty} t^{a_1-1} m(t)\, dt \right\}^{\alpha_2}$$

$$= 2^{\alpha_2}(b_2-b_1)\left(\int_{|f|>1} |f|^{a_1}\, d\mu \right)^{\alpha_2} = 2^{\alpha_2}(b_2-b_1)^{-1}\left(\int_{|f|>1} |f|^{a_1}\, d\mu \right)^{\alpha_2}$$

次に、

$$I_1 = \int_1^{\infty} y^{-1} \left\{ -\int_0^{\infty} t^{a_1}\, dm_1(t) \right\}^{\alpha_1} dy$$

$$= \int_1^\infty y^{-1} \left\{ a_1 \int_0^\infty t^{a_1-1} m(t+z)\, dt \right\}^{\kappa_1} dy$$

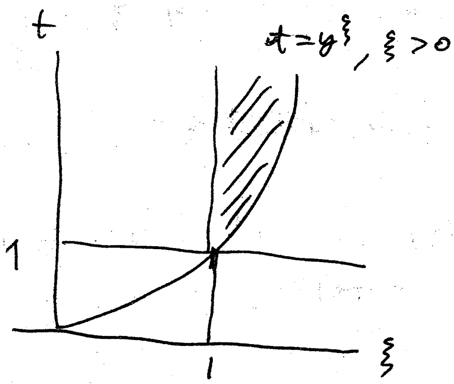
$$= \int_1^\infty y^{-1} \left\{ a_1 \int_z^\infty (t-z)^{a_1-1} m(t)\, dt \right\}^{\kappa_1} dy = a_1^{\kappa} I_{11} \quad \text{say}$$

$$I_{11}^{1/\kappa_1} = \sup_w \int_1^\infty y^{-1} \left\{ \int_z^\infty (t-z)^{a_1-1} m(t)\, dt \right\} w(y)\, dy$$

ここで $w(y)$ は、

$$\int^\infty y^{-1} w^{\kappa_1'}(y)\, dy \leqq 1$$

を満足する函数とする。



$$\int_1^\infty y^{-1} \left\{ \int_z^\infty (t-z)^{a_1-1} m(t)\, dt \right\} w(y)\, dy$$

$$\leqq \int_1^\infty (t-z)^{a_1-1} m(t) \int_1^{t^{1/\xi}} y^{-1} w(y)\, dy$$

$$\leqq \int_1^\infty t^{a_1-1} m(t)\, dt \left\{ \int_1^{t^{1/\xi}} y^{-1} dy \right\}^{1/\kappa_1} \left\{ \int_1^{t^{1/\xi}} y^{-1} w(y)^{\kappa_1'} dy \right\}^{1/\kappa_1'}$$

$$\leqq \int_1^\infty t^{a_1-1} (\log t^{1/\xi})^{1/\kappa_1} m(t)\, dt = \underbrace{\ }_{\xi^{-1/\kappa_1}} \int_1^\infty t^{a_1-1} (\log t)^{\frac{1}{\kappa_1}} m(t)\, dt$$

ここで

$$a_1 t^{a_1-1} (\log t)^{1/\kappa_1} = \left(t^{a_1} (\log t)^{1/\kappa_1} \right)' - \frac{1}{\kappa_1} t^{a_1-1} (\log t)^{1/\kappa_1 - 1}$$

$$< \left(t^{a_1} (\log t)^{1/\kappa_1} \right)' \quad \text{for } t > 1$$

従って、

$$\xi^{-1/\kappa_1}\int_1^\infty \left(t^{a_1}(\log t)^{1/\kappa_1}\right)' m(t)\,dt$$

$$= \xi^{-1/\kappa_1}\left\{ t^{a_1}(\log t)^{1/\kappa_1} m(t)\Big|_{t=1}^{t=\infty} - \int_1^\infty t^{a_1}(\log t)^{1/\kappa_1}\,dm(t)\right\}$$

$$= \xi^{-1/\kappa_1}\int_{|h|>1} |h|^{a_1}(\log|h|)^{1/\kappa_1}\,d\mu = \xi^{-1/\kappa_1}\int_{|f|>1}|f|^{a_1}(\log|f|)^{1/\kappa_1}\,d\mu$$

ここで $\xi = a_2(b_2-b_1)/b_2(a_2-a_1) > 0.$ 故に

$$I_1 \leqq a_1^{\kappa_1}\xi^{-1}\left(\int_{|f|>1}|f|^{a_1}(\log|f|)^{1/\kappa_1}\,d\mu\right)^{\kappa_1}$$

以上の評価式から，

$$(3)\quad \int_{|Th|>1}|Th|^{b_1}\,d\nu \leqq M_1^{b_1}\left(\int_{|f|>1}|f|^{a_1}d\mu\right)^{\kappa_1} + b_1(2K)^{b_2}M_2^{b_2}2(b_2-b_1)^{-1}\times$$

$$\times\left(\int_{|f|>1}|f|^{a_1}d\mu\right)^{\kappa_2} + b_1(2K)^{b_1}M_1^{b_1}a_1^{\kappa_1}\frac{b_2(a_2-a_1)}{a_2(b_2-b_1)}\times$$

$$\times\left(\int_{|f|>1}|f|(\log|f|)^{1/\kappa_1}d\mu\right)^{\kappa_1}$$

すなわち，

$$\int_{|Th|>1}|Th|^{b_1}\,d\nu \leqq \mathrm{const}\left\{\left(\int_{|f|>1}|f|^{a_1}d\mu\right)^{\kappa_1+\kappa_2} + \left(\int_{|f|>1}|f|^{a_1}(\log|f|)^{1/\kappa_1}d\mu\right)^{\kappa_1}\right\}$$

以下の計算は全く前の定理の場合と同様であって，次の Lemma に (1), (2) および (3) を適用して得られる．

Lemma　$A, B, C > 0$ かつ $A \leqq K(B+C)$ が成立しているとき、次の不等式が成立つ。

(i) $0 < A \leqq 1$ のとき

$$A \leqq \begin{cases} K(B+C), & \text{if } 0<C<1 \\ K\left(B + C^{\frac{b_1}{b_2}}\right), & \text{if } C>1 \end{cases}$$

(ii) $A > 1$ のとき

$$A < \begin{cases} (2K)^{\frac{b_2}{b_1}}\left(B^{\frac{b_2}{b_1}} + C^{\frac{b_2}{b_1}}\right), & \text{if } 0<C<1 \\ (2K)^{\frac{b_2}{b_1}}\left(B^{\frac{b_2}{b_1}} + C\right), & \text{if } C>1 \end{cases}$$

Lemmaの証明は略する。

(1), (2), (3) と Lemma より、

$$\int_{|Tf|>1} |Tf|^{b_1}\, d\nu$$
$$\leqq K'\left\{ \left(\int_{|f|\leqq 1} |f|^{a_2} d\mu\right)^{k_2} + \left(\int_{|f|>1} |f|^{a_1} d\mu\right)^{k_1+k_2} + \left(\int_{|f|>1} |f|^{a_1}(\log|f|)^{1/k_1} d\mu\right)^{k_1} \right\}$$

$$\int_{|Tf|\leqq 1} |Tf|^{b_2}\, d\nu$$
$$\leqq K''\left\{ \left(\int_{|f|\leqq 1} |f|^{a_2} d\mu\right)^{k_2} + \left(\int_{|f|>1} |f|^{a_1} d\mu\right)^{k_1+k_2} + \left(\int_{|f|>1} |f|^{a_1}(\log|f|)^{1/k_1} d\mu\right)^{k_1} \right\}$$

よって定理1は証明された。

Corollary 1 は定理1から直ちに得られる。

§3. Some remarks

(1) ここで用いた方法は，本質的には A. Zygmund [5] が用いた方法を借用している．他の方法として，例えば S. Yano [4] の extrapolation method がある．これは，いまの処 sub-linear operator にしか適用出来ない．しかし，例えば

$$(3)' \quad \left(\int_{|\tilde{f}_\lambda|>1} |\tilde{f}_\lambda|^{\frac{1}{\lambda}} \, dx \right)^{\lambda}$$

$$\leq \left\{ O(1) \int_{|f|>1} |f| (\log|f|)^{\lambda} dx + O(1) \right\} \max\left(1, \left(M_0 \int_{|f|>1} |f| \, dx\right)^{\frac{s\lambda-1}{s\lambda}}\right)$$

が得られる．

(2) 他の方法として，Lorentz space や Lions-Peetre の K-norm などについて，この定理が一般化されることが望ましい．しかし，critical case (interpolating parameter θ が 0 or 1 の case) なので簡単ではない．

References

[1] G. H. Hardy – J. E. Littlewood, Some properties of fractional integral (I), Math. Zeit. 28 (1928), 565–606, II, ibid., 34 (1931-2), 403–439.

[2] S. Koizumi, Contributions to the theory of interpolation

of operations. Osaka J. Math. vol. 8 (1971), 135-149.

[3]. S. L. Sobolev, On a theorem of functional analysis, Mat. Sbornik, vol. 4 (1938), 279-282.

[4]. S. Yano, An extrapolation theorem, J. Math. Soc. Japan, 3 (1951), 296-305

[5] A. Zygmund, On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations, J. Math. Pures et Appl. 35 (1956), 223-248.

[6] A. Zygmund, Trigonometrical series, I, II, Cambridge (1959).

Department of Applied Mathematics
The Osaka University.