数理解析研究所講究録
第138巻 1972年 1-10

拡散過程の局所構造

阪大 理　池田信行
京大 理　渡辺信三

§1 序

拡散過程の研究においては，ありうる可能な拡散過程をすべて決定するということのみでなく，可能な拡散過程のうちどれが本質的に同じであり，又異なるかというような問題も重要であろう．このような方向はあまり多次元拡散過程において系統的に研究されているとはいえない．しかし，拡散過程を特性づける解析的量と path の行動のしかたの関連については色々と詳しい研究がなされており，それを上の問題意識のもとで整理してみるのも有益なことと思われる．

1次元拡散過程における Feller, Itô-McKean, Dynkin らの研究を多次元拡散過程に自然な形でもちこもうとすると，まず time change と空間の座標変換でたがいに移るものを同じクラスと見なし，それによって多次元拡散過程を分類することがまず考えられる．1次元の場合その拡散過程が

degenerate しない場合には（いわゆる regular interval では）このような同値類は（少くとも局所的に）ただ一つのみであることはよく知られている．多次元では，たとえ２次元にかぎってもこの意味の同値類は数多く存在する．

そこで次の定義を与える：

定義 1． $\mathbb{X}_i = \{X_t, P_x^{(i)}, x \in D_i\}$ $(i=1,2)$ をそれぞれ D_1，D_2 上の diffusion process とする．これが similar であるというのは

① $\exists f : D_1 \longrightarrow D_2$: homeomorph

② $\mathbb{X}_2$ と $\mathbb{X}_1$ を f で D_2 にうつした diffusion $f(\mathbb{X}_1)$ が同じ hitting probability をもつ．

このとき一般論によって $\mathbb{X}_2$ と $f(\mathbb{X}_1)$ は互いに時間変更によって移り得る．

定義 2． D_i $(i=1,2)$ 上の二つの diffusion $\mathbb{X}_i$ を考え $x_0^{(1)} \in D_1$， $x_0^{(2)} \in D_2$ とする．$\mathbb{X}_1$ と $\mathbb{X}_2$ が点 $x_0^{(1)}, x_0^{(2)}$ において locally に similar であるというのは $x_0^{(i)}$ の近傍 $U(x_0^{(i)})$ が存在し $\mathbb{X}_i$ を $U(x_0^{(i)})$ に制限した subprocess $\mathbb{X}_i|_{U(x_0^{(i)})}$ が定義 1 の意味で similar なこととする．

そこで我々の問題は，多次元拡散過程について自然な條件

によってこの similarity による同値類を特性づけ，拡散過程の分類が出来ないかということである．その條件も出来るだけ確率論的に意味のあるものが望ましい．この方向に関しては， 満足すべき結果は何も得ていないが一つの試みとして２次元拡散過程について similarity による同値類の数学的記述を考えてみた．下にみるように決して十分なものでなく意味ある結果（もしそれが得られるものならば）までにはまだ多くのことがなされなければならぬと考える．あとシンポジウムの際には，similarity の不変量としていくつかの概念を提示し，それによって従来知られている結果をまとめ直して報告したが，筆者による Seminar on Probability Vol. 35 と重複するのでこの報告からは除くことにする．

§2 ２次元拡散過程の similarity．

以下で２次元拡散過程について，その local な similarity による同値類を記述することを考える．

まず，$D \subset R^2$ 上の diffusion は，係数の正則性や non-degeneracy に関する一般的條件のもとでその local generator が

$$(1) \quad \Delta + b_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + b_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

となるものと locally に similar になる．このことは解析的には，

2階の楕円型微分作用素が local な座標変換で

$$\frac{1}{a(x)}\left(\Delta + b_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

なる形に reduce 出来ることに対応している．

この事実にもとずいてその local generator が (1) 式であたえられる diffusion のクラスについてその similarity による分類を考えてみる．今 x-plane と x'-plane にそれぞれ vector field $\mathbb{b}(x)$, $\mathbb{b}'(x')$ が与えられたとし local generator がそれぞれ

$$L_1 = \Delta + (\nabla, \mathbb{b})$$

$$L_2 = \Delta' + (\nabla', \mathbb{b}') \qquad (\,'\text{ は } x'\text{ に関する微分})$$

で与えられる diffusion $\mathbb{X}$, $\mathbb{X}'$ を考える．今 $\mathbb{X}$ と $\mathbb{X}'$ が locally に similar であるとしてその条件を求めてみる．similarity を与える変換を

$$(2) \qquad x' = f(x) \qquad \left(\text{i.e.} \quad \begin{matrix} x_1' = f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2) \end{matrix}\right)$$

とする．vector field $\mathbb{b}$, $\mathbb{b}'$ が十分滑らかとすると，(2) の f も十分滑らかなものになる．又一般性を失うことなしに考えている点の近傍でヤコビヤン $\det \frac{dx'}{dx} > 0$ と仮定してよい．ここで

$$\frac{dx'}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \end{pmatrix}$$

今 $u(x')$ に対し $\hat{u}(x) \equiv u(f(x))$ と x へ座標変換すると

(3) $$\Delta \hat{u}(x) = \alpha_{11}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1'^2} + 2\alpha_{12}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1' \partial x_2'} + \alpha_{22}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2'^2} + \gamma_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1'} + \gamma_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2'}$$

(4) $$b_1(x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} + b_2(x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2} = \beta_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1'} + \beta_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2'}$$

ここで

(5) $$\begin{cases} \alpha_{11}(x) = \left(\dfrac{\partial x_1'}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial x_1'}{\partial x_2}\right)^2 = (\nabla f_1, \nabla f_1) \\ \alpha_{12}(x) \equiv \alpha_{21}(x) = \dfrac{\partial x_1'}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_2'}{\partial x_1} + \dfrac{\partial x_1'}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2'}{\partial x_2} = (\nabla f_1, \nabla f_2) \\ \alpha_{22}(x) = \left(\dfrac{\partial x_2'}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial x_2'}{\partial x_2}\right)^2 = (\nabla f_2, \nabla f_2) \\ \beta_1(x) = b_1 \dfrac{\partial x_1'}{\partial x_1} + b_2 \dfrac{\partial x_1'}{\partial x_2} = (\mathfrak{b}, \nabla f_1) \\ \beta_2(x) = b_1 \dfrac{\partial x_2'}{\partial x_1} + b_2 \dfrac{\partial x_2'}{\partial x_2} = (\mathfrak{b}, \nabla f_2) \\ \gamma_1(x) = \dfrac{\partial^2 x_1'}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 x_1'}{\partial x_2^2} = \Delta f_1 \\ \gamma_2(x) = \dfrac{\partial^2 x_2'}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 x_2'}{\partial x_2^2} = \Delta f_2 \end{cases}$$

さて $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$ が similar ということは、写像 (2) によって

$$u(x') \longrightarrow \tilde{u}(x) = u(f(x))$$

$$L_2 u(x') \longrightarrow \widetilde{L_2 u}(x) = (L_2 u)(f(x))$$

とするとき $\exists\, a(x) > 0$

$$L_1 \tilde{u}(x) = a(x) \cdot \widetilde{L_2 u}(x)$$

となることである．したがって(3)(4)(5)より

(6) $$\alpha_{11}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1'^2}+2\alpha_{12}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1'\partial x_2'}+\alpha_{22}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2'^2}$$
$$+(\beta_1(x)+\gamma_1(x))\frac{\partial u}{\partial x_1'}+(\beta_2(x)+\gamma_2(x))\frac{\partial u}{\partial x_2'}$$
$$=a(x)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1'^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2'^2}+b_1'(f(x))\frac{\partial u}{\partial x_1'}+b_2'(f(x))\frac{\partial u}{\partial x_2'}\right)$$

これよりまず

(7) $$\alpha_{ij}(x)=\delta_{ij}\,a(x) \qquad i.j=1.2$$

他方(5)より　$\alpha=(\alpha_{ij})$ として

$$\alpha=\frac{dx'}{dx}\cdot{}^t\frac{dx'}{dx}$$

故に　$a(x)^{-\frac{1}{2}}\dfrac{dx'}{dx}$　は　determinant 1の直交行列になる、特に

(8) $$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=\frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}=-\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

これは Cauchy－Riemann 方程式であり，故に(2)で与えられる写像は holomorphic である．すると(5)より $\gamma_1(x)=\gamma_2(x)\equiv 0$ がわかりしたがって $\mathfrak{b}$ と $\mathfrak{b}'$ の関係は $\left(\mathfrak{b}(x)=\begin{pmatrix}b_1(x)\\ b_2(x)\end{pmatrix}\right.$ とタテ・ベクターと考えて$\left.\right)$

(9) $$a(x)\cdot\mathfrak{b}'(f(x))=\frac{dx'}{dx}\cdot\mathfrak{b}(x)$$

で与えられる．一方

$$a(x)=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2=f'(x)=\det\frac{dx'}{dx}$$

($f'(x)$ は $x'=f(x)$ を解析函数と考えての微分)

であり したがって (9) は

(10) $$\mathfrak{b}'(f(x)) = a(x)^{-1} \frac{dx'}{dx} \cdot \mathfrak{b}(x)$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} b_1'(f(x)) \\ b_2'(f(x)) \end{pmatrix} = \frac{\frac{df}{dx}}{\det \frac{df}{dx}} \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \end{pmatrix}$$

以上まとめると

<u>定理 1</u> $\mathbb{X}_1$: local generator $\Delta + b_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + b_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2}$

$\mathbb{X}_2$: local generator $\Delta + b_1'(x')\frac{\partial}{\partial x_1'} + b_2'(x')\frac{\partial}{\partial x_2'}$

なる diffusion とするとき

$\mathbb{X}_1$ と $\mathbb{X}_2$ が locally similar

$\Longleftrightarrow$ $\exists f$: $x' = f(x)$: holomorphic

$$\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \end{pmatrix}(f(x)) = \frac{\frac{df}{dx}(x)}{\det \frac{df}{dx}(x)} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}(x)$$

今 differential form

(11) $$\omega = (\mathfrak{b}, dx) = b_1(x)dx_1 + b_2(x)\,dx_2$$

を考えると, $\frac{df}{dx}\Big/\det\frac{df}{dx} = {}^t\!\left(\frac{df}{dx}\right)^{-1}$ により

$$(b_1', b_2')\frac{df}{dx} = (b_1, b_2)$$

であるので

$$(\mathfrak{b}'\ dx') = (\mathfrak{b}, dx).$$

かくして differential form $\omega' = (\mathfrak{b}', dx')$ と $\omega = (\mathfrak{b}, dx)$ は conformally equivalent である.

$\Delta + (\mathfrak{b}, \nabla)$ に対応する diffusion に differential form $\omega = (\mathfrak{b}, dx)$ を対応させて考えるとき diffusion の similarity による equivalence class と differential form の conformally equivalent の equivalence class が1対1に対応することがわかった.

特に重要な場合として vector field $\mathfrak{b}$ が potential をもつ i.e. $\exists U$

$$(12) \qquad \mathfrak{b} = \nabla U$$

という場合を考える. potential が存在するための同値な確率論的条件は X が局所的に対称, すなわち $X|_{U(x)}$ がある測度に関して対称ということである. このことについては筆者の一人によるこの予稿集の報告を参照されたい. よく知られたように局所的に (12) のなりたつ条件は

$$(13) \qquad \frac{\partial b_1}{\partial x_2} = \frac{\partial b_2}{\partial x_1}$$

である. このとき local similarity の条件は次のようになる

(14) $\mathfrak{b}$ が potential U をもつときそれと similar な diffusion に対応する $\mathfrak{b}'$ も potential U' をもつ. similar であるためには

$\exists \quad x' = f(x)$

$$U'(f(x)) = U(x)$$

この際 $U(x)$ が完全な invariant である.

<u>例 1</u>. $\mathbb{b} = 0$ のとき (i.e. 2次元 Brown 運動) は唯一つの同値類よりなる.

<u>例 2</u>. $\Delta + \frac{\partial}{\partial x_1}$ と local に similar な diffusion $\Delta + (\mathbb{b}, \nabla)$ は次のクラスである. $\exists U$: harmonic : $(\nabla U \neq 0)$ $\quad \mathbb{b} = \nabla U$. 写像関数は $U = \mathrm{Re} f$ となる解析関数 f である. 例えば $(x, y) \neq (0, 0)$ の近傍で

$$\Delta + \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{-x}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y} \quad と \quad \Delta + \frac{\partial}{\partial x}$$

は similar~~ity~~ である. $\Delta + y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$ と $\Delta + \frac{\partial}{\partial x}$ は similar でなり

.

<u>例 3</u> もう少し一般に

$$\Delta + b_1(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} \quad と \quad local \; に \; similar \; な \; \Delta + (\mathbb{b}, \nabla)$$

は次のクラスである : $g_1(x)$ を $b_1(x)$ の原始関数とするとき $\exists U$: harmonic $(\nabla U \neq 0)$

$$\mathbb{b} = \nabla \cdot g_1(U(x))$$

<u>例 4</u>. 今 $\mathbb{X}_1$ の local generator を $\Delta + b_1\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\mathbb{X}_2$ の local generator を $\Delta + b_2\frac{\partial}{\partial x_1}$ とする. 今どちらも potential をもつとする:

$$(b_1, 0) = \nabla U_1$$

$$(b_2, 0) = \nabla U_2$$

これより明らかに $U_1(x_1, x_2) = U_1(x_1)$, $U_2(x_1, x_2) = U_2(x_1)$ したがって b_1, b_2 は x_1 のみの関数である。

さらに $\mathfrak{X}_1$ と $\mathfrak{X}_2$ が similar であるためには

$$U_1(x_1) = U_2(cx_1 + d) \qquad \exists c, d : \mathrm{const}\ (c \neq 0)$$

である。

上の話は、$\Delta + (b, \nabla)$ の形に reduce した上で similarity の分類を考えたが、この reduction の probabilistic な意味があまり明確でないので probabilistic な意味のわかった分類になっていない。この方向のことはもっと調べてみたいと思っている。