数理解析研究所講究録
第138巻 1972年 111-117



# マルコフ過程の分枝性

東京工業大学理学部　長 沢 正 雄

§1. マルコフ過程の分枝性については Ikeda-Nagasawa-Watanabe [1], [2] に詳しく論じられていて，あらためて述べる必要はないと思われるが，ここでは，それが実は更に簡単な構造(multiplicativity)であることを注意して，その応用を与える．

<u>定義1</u>. 可測空間$S$に可測な積 $a\cdot b\in S$ $(a, b\in S)$ が定義され，単位元$\partial$をもつとき，$S$を <u>multiplicative</u> と呼ぶ．

multiplicative な空間$S$上に可測な強マルコフ過程 $X_t$ と，quasi-hitting time $\tau$ が与えられていて，

$P.[\tau=t]=0$, $\forall t\geq 0$とする．

$\tau_0\equiv 0$, $\tau_1=\tau$, $\tau_n=\tau_{n-1}+\tau\circ\theta_{\tau_{n-1}}$, $(n\geq 2)$

とおいて

$T_t^r(\cdot, B)=P.[X_t\in B,\ \tau_r\leq t<\tau_{r+1}]$,

$\psi(\cdot, \Gamma, B)=P.[\tau\in\Gamma,\ X_\tau\in B]$,

と定義する．

以下では Property BⅢ（[1]，[2]参照）に対応する次の性質を仮定する．

性質(i)　$T_t^\circ(a\cdot b,\cdot)=T_t^\circ(a,\cdot)*T_t^\circ(b,\cdot)$，

(ii)　$\psi(a\cdot b,ds,\cdot)=\psi(a,ds,\cdot)*T_s^\circ(b,\cdot)+T_s^\circ(a,\cdot)*\psi(b,ds,\cdot)$.

ここで測度$\nu,\mu$の積$\nu*\mu$は

$$\int\nu*\mu(\cdot)f(\cdot)=\int\nu(dc_1)\int\mu(dc_2)f(c_1\cdot c_2)$$

である。

定義2．$\mathcal{S}$上の函数$f$が

$$f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b),\quad f(\partial)=1,$$

をみたすとき，$f$は multiplicative であると呼ぶ．

Lemma 1．$f$がmultiplicativeならば

$$T_t^r f(a\cdot b)=\sum_{i=0}^r T_t^i f(a)T_t^{r-i}f(b)$$

である．

証明］$r=0$については性質(i)から明らか．

$$T_t^{r+1}f(a\cdot b)=\int_0^t\int\psi(a\cdot b,ds,dc)T_{t-s}^r f(c)$$

$$=\int_0^t\int\{\psi(a,ds,dc_1)T_s^\circ(b,dc_2)+\psi(b,ds,dc_2)T_s^\circ(a,dc_1)\}\sum_{i=0}^r T_{t-s}^i f(c_1)T_{t-s}^{r-i}f(c_2)$$

$$=\sum_{i=0}^r\int_0^t\int\{d(-T_s^\circ T_{t-s}^{i+1}f(a))T_s^\circ T_{t-s}^{r-i}f(b)+T_s^\circ T_{t-s}^i f(a)d(-T_s^\circ T_{t-s}^{r+1-i}f(b))\}$$

$$=\sum_{i=0}^{r+1}\int_0^t\int d(-T_s^\circ T_{t-s}^i f(a)T_s^\circ T_{t-s}^{r+1-i}f(b))$$

$$=\sum_{i=0}^{r+1}T_t^i f(a)T_t^{r+1-i}f(b)$$

（証明おわり）

このLemmaから，次の定理がただちに導かれる．

定理1　$f$が multiplicative ならば，$T_t f = \sum_{r=0}^{\infty} T_t^r f$として

(1)　$T_t f(a \cdot b) = T_t f(a) \cdot T_t f(b)$

である．

この性質(1)のことを，半群$T_t$（又はマルコフ過程$X_t$）が Multiplicative であると呼ぶことにする。

特に$\mathcal{S}$がある空間$S$によって，　$\mathcal{S} = \bigcup_{n=0}^{\infty} S^n$

（ここで$S^n$は Cartesian Product（又はその permutation による商空間）であって，$S^0 = \{\partial\}$である）と与えられているとき，

$\underline{\underline{x}} = (x_1, \cdots, x_n)$，　$\underline{\underline{y}} = (y_1, \cdots, y_m)$ の積を

$\underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{y}} = (x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$

と定義すれば，$\mathcal{S}$は multiplicative であり，又$S$上の函数$f$に対し$\hat{f}$を

(2)　$\hat{f}(\underline{\underline{x}}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$，　$\hat{f}(\partial) = 1$

とすれば，$\hat{f}$は multiplicative であるから，性質(i)(ii)の下で，(1)から，分枝性

(3)　$T_t \hat{f}(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} T_t \hat{f}(x_i)$，　$T_t \hat{f}(\partial) = 1$

がただちに導かれる．

§2.　昨年10月の確率論セミナー総会で白尾恒吉氏により報告された微分をもつ分枝マルコフ過程の構成及び「分枝性」

の証明には一部分不十分な点があったが，§1で述べたmultiplicativityを用いることにより，次のように明確化することが出来る。

$S$を局所コンパクトなハウスドルフ空間で，$C^\infty$－構造をもつとし，

$\underline{\underline{S}}^{(0)}=\bigcup_{n=0}^{\infty} S^n$，（$S^n$はCartesian product），$S^0=\{\partial\}$，

$\underline{\underline{S}}^{(1)}=\{(\underline{\underline{x}}_0,\ D(\underline{\underline{x}}_1),\cdots,D(\underline{\underline{x}}_m))\,;\ m=1,2,\cdots,\ ^{\exists}\underline{\underline{x}}_i\neq\partial,\ \underline{\underline{x}}_i\in\underline{\underline{S}}^{(0)}$，

及びそのpermutation$\}$，

$\underline{\underline{S}}^{(n)}=\{(a_0,D(a_1),\cdots,D(a_m))\,;\ m=1,2,\cdots,\ a_0\in\underline{\underline{S}}^{(0)}\cup\cdots\cup\underline{\underline{S}}^{(n-1)},\ a_j\in\underline{\underline{S}}^{(n-1)},(j\geq 1)$

及びそのpermutation$\}$，

$\mathcal{S}=\bigcup_{n=0}^{\infty}\underline{\underline{S}}^{(n)}$，

とおいて，$a,b\in\mathcal{S}$の積を

$$a\cdot b=(a,b)$$

で定義すると，$\mathcal{S}$はmultiplicativeになる。

<u>定義3</u>．$\mathcal{S}$の要素で同じ型のものを集めて（例えば，$S\times DS$，$DS\times S$，等々），それを<u>$\mathcal{S}$の部分空間</u>と呼ぶ。

<u>定義4</u>．各部分空間の要素に対し，そのDを取り除いて出来る$\underline{\underline{S}}^{(0)}$の要素を対応させる写像$\gamma$を<u>stripping</u>と呼ぶ。（例えば，$\gamma(x_1,D(x_2))=(x_1,x_2)$）

$\mathcal{S}$には$\gamma^{-1}$により$\underline{\underline{S}}^{(0)}$から位相を導入する。

$S$上に右連続なpathを持つ強マルコフ過程$x_t$が与えられ，

(4) $\quad H_t^0 D = D H_t^0$

とする．ここで $H_t^0$ は $x_t$ の $e^{-ct}$-subprocess ($c = const. > 0$) の半群，D は一階の微分作用素である．

<u>定義4</u>．$a \in \mathcal{S}$, $\gamma a = (x_1, \cdots, x_n)$ のとき，$a_m^{pq} \in \mathcal{S}$ を

$a_m^{00}$ : $a$ の座標 $x_m$ を $\partial$ でおきかえたもの，

$a_m^{pq}$ : $a$ の座標 $x_m$ を $\underbrace{x_m, \cdots, x_m}_{p\text{個}}, \underbrace{D(x_m), \cdots, D(x_m)}_{q\text{個}}$

でおきかえたもの．

とする．

$E = \mathcal{S} \times N \times J$, $N = \{0, 1, 2, \cdots\}$, $J = \{0, 1\}$ とし，

$E \times E$ 上の kernel $\mu_m^+, \mu_m^-$ を次の様に定義する．

$$\mu_m^{+(-)}((a, k, j), d(b, k', j')) = \sum_{\substack{C_{pq} \geq 0 \\ (C_{pq} < 0)}} |C_{pq}| \delta(a_m^{pq}, db)\, \delta_{kk'}\, \delta_{j^+ j'} \quad (\delta_{j^- j'})$$

ここで $\{C_{pq}\}$ は constant で $\sum_{p,q} |C_{pq}| = 1$ を満しているとし，

$j^+, j^-$ は

| $j$ | $j^+$ | $j^-$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

で与えられている．

次に E 上の non-branching part $Z_t^0$ を $x_t$ の $e^{-ct}$-subprocess の直積によって定義し，(Ikeda-Nagasawa-Watanabe [1], [2], Nagasawa [3], [4] 参照) $\Omega \times E$ 上の kernel $\mu$ を

(5) $\quad \mu(w, B) = \sum_m I_{\{\tau = \zeta_m\}} \{\mu_m^+(Z_\tau^0, B) + \mu_m^-(Z_\tau^0, B)\}$

とする。ここで $I_A$ は A の indicator, $\tau = \min_m \zeta_m$ である.

$\mu$ は instantaneous distribution ([1], [4] 参照) であるから,「つなぎあわせ法」により $Z_t^0$, $\mu$ から E 上の強マルコフ過程 (Path は右連続) $Z_t$ を作ることが出来る.

S 上の $C^\infty$-函数 f に対して, $\underline{\underline{x}} \in \underline{\underline{S}}^{(0)}$ のとき $\hat{f}$ を (2) で定義し, 更に $a = (\underline{\underline{x}}_0, D(\underline{\underline{x}}_1), \cdots, D(\underline{\underline{x}}_m))$ のとき

(6) $\quad \hat{f}(a) = \hat{f}(\underline{\underline{x}}_0) D\hat{f}(\underline{\underline{x}}_1) \cdots D\hat{f}(\underline{\underline{x}}_m)$

とおく. ここで

$$D\hat{f}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} D_{x_i} \hat{f}(x_1, \cdots, x_n).$$

これをくりかえして, 一般に任意の $a \in \mathcal{S}$ に対して, $\hat{f}(a)$ を定義することが出来る. 最後に $E = \mathcal{S} \times N \times J$ 上の函数 $\tilde{f}$ を

$$\tilde{f}(a, k, j) = (-1)^j 2^k \hat{f}(a)$$

とおくと $\tilde{f}$ は multiplicative になる, すなわち

$$\tilde{f}((a \cdot b), k, j)) = (-1)^j 2^k \tilde{f}(a) \tilde{f}(b)$$

である. (ここで $(a, 0, 0)$ を簡単のため単に $a$ と書いている. 以下でも同様.)

§1 の結果により

<u>Lemma 2</u>. $T_t \tilde{f}(a \cdot b) = T_t \tilde{f}(a) \cdot T_t \tilde{f}(b)$.

更に性質 (4) により

<u>Lemma 3</u> $\quad T_t \tilde{f}(Da) = D T_t \tilde{f}(a)$.

従って, ただちに $T_t$ の「分枝性」に関する次の定理を証明する

ことが出来る

<u>定理2.</u> $T_t\tilde{f}(a,k,j)=\widetilde{(T_t\tilde{f})|_S}(a,k,j)$

ここで $(T_t\tilde{f})|_S$ は $T_t\tilde{f}$ を $S$ 上に制限したものである，

この分枝性から，

$$u(t,x)=T_t\tilde{f}(x,0,0)$$

とおくと，$u$ が存在するならば（すなわち，$\tilde{f}$ が $P_x$ に関し可積分ならば）次の方程式の解であることがわかる．

$$u(t,x)=H_t f(x)+\int_0^t c\,ds\int H_s(x,dy)\sum_{pq} c_{pq}(u(t-s,y))^p(Du(t-s,y))^q$$

ここで $H_t(x,dy)$ は $S$ 上のマルコフ過程 $x_t$ の遷移確率である．


〔1〕 池田，長沢，渡辺：分枝マルコフ過程の基礎，Sem. on Prob. vol. 23

〔2〕 Ikeda-Nagasawa-Watanabe, Branching Markov processes I, II, III, J.M. Kyoto Univ. vol. 8 (1968) 233-278, 365-410, vol. 9 (1969) 45-160.

〔3〕 Nagasawa, Construction of branching Markov processes with age and sign, Kodai Math. Sem. Rep. vol. 20 (1968) 469-508

〔4〕 Nagasawa, Lecture note on Markov processes, Aarhus University 1970/71.

〔5〕 白尾恒吉，Generalized Burger's equation と分枝過程，1970 確率論セミナー総会.