数理解析研究所講究録
第138巻 1972年 118-124

Controlled Galton-Watson process について

東工大 理学部　藤曲哲郎

1. Galton-Watson process (GWP) では各個体は与えられた法則に従って分裂し，幾つかの新しい個体を産みだす。さらにその分裂法則は個体の属する世代，及びその同世代の他の個体には無関係に与えられ，各個体に共通である。このノートでは各個体の分裂法則がその同世代の個体の総数に依存して定まるような場合に拡張し，その簡単な性質，特にその漸近的性質を調べることを目的とする。第 $n\,(\geq 0)$ 世代目の個体の総数を Z_n とすると，それは次のように定式化される：確率分布の列 $\mathfrak{p}(i) = \{p_r(i)\,;\, r \geq 0\}$, $i = 0, 1, 2, \cdots\cdots$, 但し $p_r(i) \geq 0$, $\sum_{r=0}^{\infty} p_r(i) = 1 \quad (i \geq 1)$, $p_r(0) = \delta_{r0}$, が与えられたとき，$\{Z_n, P_i\,;\, i \in \omega\}$ は $\omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 上の Markov chain で，その推移確率 $P_{ij}\,;\, i, j \geq 0$ は

$$P_{ij} = \sum_{r_1 + \cdots + r_i = j} p_{r_1}(i)\, p_{r_2}(i) \cdots p_{r_i}(i)$$

によって定義される。

$\{Z_n\}$の定義からn世代目の各個体は，その総数Z_nが与えられたとき法則$\mathfrak{p}(Z_n)$に従って分裂して次の$(n+1)$世代を形成する。各世代の個体の総数に従ってその世代の個体の分裂法則を与えることができる，という意味でこの Markov chain $\{Z_n\}$を <u>controlled Galton-Watson process</u>（CGWP）と呼ぼう。

なお$\{Z_n\}$はその定義から分るように，各個体の間に或る相互作用を持った分枝過程の一つのモデルである。相互作用のある集団の漸近的性質については Kesten [2]によって研究されているが，ここではCGWPに限ってその性質を調べることにする。

さらに以下では

(1) $$p_0(i)+p_1(i)<1 \quad , \forall i\geqq 1$$

を仮定する。

2. $\{\mathfrak{p}(i):i\geqq 0\}$が一般のときに成立つ定理を一つ述べる。

<u>Theorem</u> 1. 各$i\geqq 0$に対して，

$$P_i(Z_n\longrightarrow 0 \text{ or } Z_n\longrightarrow\infty, \text{ as } n\longrightarrow\infty)=1.$$

証明． これを示すには各$i\geqq 1$が transient state であることを云えばよい。そこで先づ$p_0(i)>0$ならば，

$$P_i(Z_n = i \text{ for some } n \geq 1) \leq 1 - (p_0(i))^i < 1$$

であるから i は transient である。次に $p_0(i) = 0$ のとき，$\forall j \geq i$ に対して $p_0(j) = 0$ ならば，仮定(1)により明らかに i は transient である。したがって $J \equiv \{j > i ; p_0(j) > 0\} \neq \phi$ とする。set J への first hitting time を σ とすると，

$$P_i(Z_n = i, \text{ i.o.}) = P_i(Z_n = i, \text{ i.o.}, \sigma < \infty)$$
$$+ P_i(Z_n = i, \text{ i.o.}, \sigma = \infty).$$

ここで $\sigma = \infty$ ならば $Z_n \longrightarrow \infty$ a.s. であるから，右辺第2項は 0 である。さらに，σ での強マルコフ性から，

$$P_i(Z_n = i, \text{ i.o.}, \sigma < \infty) = E_i[\sigma < \infty ; P_{Z_\sigma}(Z_n = i, \text{ i.o.})]$$
$$\leq E_i[\sigma < \infty ; 1 - (p_0(Z_\sigma))^{Z_\sigma}]$$
$$< 1.$$

よって，$P_i(Z_n = i, \text{ i.o.}) < 1$，すなわち i は transient．以上で $\forall i \geq 1$ が transient であることが示された。

3．　或る $N > 0$ に対して $\mathfrak{p}(N) = \mathfrak{p}(N+1) = \cdots$ のとき．

このとき，

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(i) \ , \quad \forall i \geq N$$

$$\mathfrak{p} = \{p_n\} \ : \ p_0 + p_1 < 1 ,$$

としよう。$\mathfrak{p}(i) : i < N$ は任意である。さらにここでは

(2) $$\rho = \sum_{r=1}^{\infty} r p_r < \infty$$

を仮定する。また

$$q(i) = P_i(Z_n \longrightarrow 0) \text{ : 消滅確率},$$

とし, $\mathcal{P} = \{p_r\}$ に対応するGWPを $\{\tilde{Z}_n, \tilde{P}_i\}$ とする。

<u>Lemma</u> 1. $\rho \leq 1 \Rightarrow q(i) = 1, \ \forall i \geq 0.$

証明.
$$P_i(Z_n \longrightarrow \infty)$$
$$= \lim_{m \to \infty} P_i(Z_n \longrightarrow \infty, \ Z_n \geq N \ \text{ for } \forall n \geq m).$$
$$P_i(Z_n \geq N \ \text{ for } \forall n \geq m, \ Z_n \longrightarrow \infty)$$
$$= E_i[Z_m \geq N; P_{Z_m}(Z_n \geq N \ \text{ for } \forall n \geq 1, \ Z_n \longrightarrow \infty)],$$

ここで $Z_m \geq N$ であるから,

$$P_{Z_m}(Z_n \geq N \ \text{ for } \forall n \geq 1, \ Z_n \longrightarrow \infty)$$
$$= \tilde{P}_{Z_m}(\tilde{Z}_n \geq N \ \text{ for } \forall n \geq 1, \ \tilde{Z}_n \longrightarrow \infty)$$
$$= 0.$$

上では $\rho \leq 1$ であるから $q^i = \tilde{P}_i(\tilde{Z}_n \longrightarrow 0) = 1, \forall i \geq 0$ であることを使った。

$$\therefore \ P_i(Z_n \longrightarrow \infty) = 0,$$

したがって $q(i) = P_i(Z_n \longrightarrow 0) = 1, \forall i \geq 1$。 $i = 0$ については明らかである。

<u>Lemma</u> 2. $\rho > 1 \Rightarrow q(i) < 1, \ \forall i \geq 1.$

証明. 先ず $\rho > 1$ であるから $q = \tilde{P}_1(\tilde{Z}_n \longrightarrow 0) < 1$ である([1], p7). $i \geq N$ のとき,

$$P_i(Z_n \geq i \ \text{ for } \forall n \geq 1, \ Z_n \longrightarrow \infty)$$

$$= \tilde{P}_i(\tilde{Z}_n \geqq i \text{ for } \forall n \geqq 1,\ \tilde{Z}_n \longrightarrow \infty)$$
$$\geqq (1-q)^i > 0.$$

したがって　$q(i) = 1 - P_i(Z_n \longrightarrow \infty) < 1,\ \forall i \geqq N.$　さらに仮定(1)から $1 \leqq \forall i < N$ に対して，$\exists m,\ \exists k_1, k_2, \cdots, k_m$: $k_m \geqq N$,

$$P_i(Z_1 = k_1,\ Z_2 = k_2, \cdots, Z_m = k_m,\ Z_n \geqq k_m \text{ for } \forall n \geqq m)$$
$$> 0.$$

よって，　$q(i) < 1$ ，$1 \leqq \forall i < N.$

<u>Lemma</u> 3.　$\rho > 1$ のとき，$\forall i \geqq 1$ に対して

$$\exists W : W = \lim_{n \to \infty} \frac{Z_n}{\rho^n} > 0, \quad \text{a.s.}\ (P_i) \text{ on } \{Z_n \longrightarrow \infty\}.$$

証明．　$i \geqq 1$ とする．

$$P_i\left(\frac{Z_n}{\rho^n} \longrightarrow W > 0,\ Z_n \geqq N \text{ for } \forall n \geqq m\right)$$
$$= E_i\left[Z_m \geqq N;\ P_{Z_m}\left(Z_n \geqq N \text{ for } \forall n \geqq 1,\ \frac{Z_n}{\rho^n} \longrightarrow \tilde{W} > 0\right)\right].$$

ここで $Z_m \geqq N$ であるから，

$$P_{Z_m}\left(Z_n \geqq N \text{ for } \forall n \geqq 1,\ \frac{Z_n}{\rho^n} \longrightarrow \tilde{W} > 0\right)$$
$$= \tilde{P}_{Z_m}\left(\tilde{Z}_n \geqq N \text{ for } \forall n \geqq 1,\ \frac{\tilde{Z}_n}{\rho^n} \longrightarrow \tilde{W} > 0\right),$$

さらに仮定より $\rho > 1$ であるから，

$$\frac{\tilde{Z}_n}{\rho^n} \longrightarrow \tilde{W} > 0 \quad \text{a.s. on } \{\tilde{Z}_n \longrightarrow \infty\}$$

（[1], pp13－14 を参照），したがって

$$= \tilde{P}_{Z_m}(\tilde{Z}_n \geqq N \text{ for } \forall n \geqq 1)$$
$$= P_{Z_m}(Z_n \geqq N \text{ for } \forall n \geqq 1).$$

よって，

$$P_i\left(\frac{Z_n}{\rho^n} \longrightarrow W > 0,\ Z_n \geqq N \ \text{for}\ ^\forall n \geqq m\right)$$
$$= E_i\left[Z_m \geqq N;\ P_{Z_m}(Z_n \geqq N \ \text{for}\ ^\forall n \geqq 1)\right]$$
$$= P_i(Z_n \geqq N \ \text{for}\ ^\forall n \geqq m).$$

ここで $m \longrightarrow \infty$ とすると，

$$\frac{Z_n}{\rho^n} \longrightarrow W > 0 \quad \text{a.s.}(P_i) \ \text{on} \ \bigcup_m \{Z_n \geqq N \ \text{for}\ ^\forall n \geqq m\},$$

さらに $\{Z_n \longrightarrow \infty\} \subset \bigcup_m \{Z_n \geqq N \ \text{for}\ ^\forall n \geqq m\}$ であるからこの lemma の結果を得る。

以上 Lemma 1, 2, 3 より次の定理を得る：

<u>Theorem</u> 2. $\mathcal{P} = \mathcal{P}(N) = \mathcal{P}(N+1) = \cdots$ なる N が存在するとき，$\mathcal{P} = \{p_r\}$，$\rho = \sum r p_r$ とすると

$$\rho \leqq 1 \implies q(i) = P_i(Z_n \longrightarrow 0) = 1, \quad ^\forall i \geqq 0,$$
$$\infty > \rho > 1 \implies P_i\left(\frac{Z_n}{\rho^n} \longrightarrow W\right) = 1, \ ^\forall i \geqq 0$$
$$\text{且つ},\ P_i(W = 0) = q(i) < 1,\ ^\forall i \geqq 1.$$

Remark 1. 定理2では $\mathcal{P}(i)$: $i < N$ については仮定(1)以外は何も仮定されていない。例えば $\sum r p_r(i) \leqq \infty$，$i < N$ でもよい。

Remark 2. 定理1はGWPについては既によく知られた性質（[1], p8）で，この性質が各世代の個体数に応じてその分裂法則を変えた場合でもやはり成立つことを示している。

さらに詳しくそのCGWPの漸近的性質を調べると，定理2によれば各世代の個体総数が充分に大きいとき，それらの個体の分裂法則が一定であるならば，そのprocessは漸近的にはGWPと同じで，しかも各世代の個体総数が余り大きくないときに与えられる分裂法則の変化には無関係である。

[1] T. E. Harris : The theory of branching processes, Springer, 1963.
[2] H. Kesten : Some nonlinear stochastic growth models, Bull. A.M.S., 77 (4), 1971, 492－511.