数理解析研究所講究録
第 138 巻 1972 年 125-134

Spitzer の方程式とその random modification.

京大理　志賀德造

無限粒子系の運動は、最近、Harris, Spitzer 等により定式化されつつある。それは Markov 過程論自体の問題として興味あるばかりでなく、平衡の統計力学、特に Gibbs ensemble とも密接に関連づけることができる。このことは Dobrushin や Spitzer の最近の仕事をみれば、この観点から問題を深めつつあることがわかる。

この報告では、特に、方程式によって構成される無限粒子系の運動について考察する。

§1. Spitzer の方程式

次の型の無限次元連立方程式を Spitzer の方程式という。(Springer の Lecture note. "Probability & Information theory" の Spitzer の報告参照)

$$
(1.1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_k}{dt} = a(x_{k+1}(t) - x_k(t)) - a(x_k(t) - x_{k-1}(t)) \\ x_k(0) = x_k. \qquad k \in \mathbb{Z}^1 \\ \cdots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \cdots < x_n < \cdots \end{cases}
$$

ここで、$a(x)$: defined on R^1_+ を次のように仮定する。

(1.2) $a(x) \geqq 0$, strictly increasing.

(1.3) $\exists m>0, \exists M>0$. $m|x-y|<|a(x)-a(y)|<M|x-y|$

(1.1) は解があれば order preserving である。

i.e. $\cdots < x_{-1}(t) < x_0(t) < x_1(t) < \cdots < x_n(t) < \cdots \quad \forall t \geq 0$.

Probability space $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の stationary point process in R^1 を次のように定義する。

(i) $\alpha : (\Omega, \mathcal{B}, P) \longrightarrow \{R^1$ の可算集合の集まり$\}$

$\#\{\alpha(\omega) \cap [-n, n]\} < +\infty \quad \forall n \qquad a.s. (P)$

(ii) $\alpha(\omega) = \{x_n(\omega)\} \quad \cdots < x_{-1}(\omega) < x_0(\omega) < x_1(\omega) < \cdots < x_n(\omega)$

となるよう番号付けた時、$\xi_n(\omega) \equiv x_{n+1}(\omega) - x_n(\omega)$

とおけば、$\{\xi_n(\omega)\}$ は positive stationary sequence である

一般論で (ii) によって関係づけられる $\{\alpha\}$, $\{x_n\}$, $\{\xi_n\}$ は互いに 1 : 1 に対応している。

Proposition 1.

方程式 (1.1) に対し、初期値を $E\xi_0^2 < +\infty$ をみたす stationary point process にとれば、解は Probability 1. で unique に定まる。

Pf

$x_k^{(0)}(t) = x_k$

$x_k^{(n)}(t) = x_k + \int_0^t \left(a(x_{k+1}^{(n-1)} - x_k^{(n-1)}) - a(x_k^{(n-1)} - x_{k-1}^{(n-1)}) \right) ds$

とおけば、a の Lipshitz 条件から

$$|x_k^{(n+1)}(t) - x_k^{(n)}(t)| \leqq M^n \frac{t^{n+1}}{n+1!} \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} |a(x_{k+n+1-i} - x_{k+n-i}) - a(x_{k+n-i} - x_{k+n-i-1})|$$

が成立つ。従って $\{x_k\}$ の stationarity と moment の仮定より、

$$E \sum_n \sup_{0 \leqq t \leqq T} |x_k^{(n+1)}(t) - x_k^{(n)}(t)| < +\infty 。$$

ゆえに、$x_k^{(n)}(t) \rightrightarrows {}^{\exists} x_k(t)$

この $\{x_k(t)\}$ が unique solution になる。

$\forall t \geqq 0$ に対して (1.1) の解 $\{x_k(t)\}$ は stationary point process になっている。

従って、$\xi_k(t) = x_{k+1}(t) - x_k(t)$ とおけば、(1.1) は次の方程式と同等である。

$$(1.4) \begin{cases} \dfrac{d\xi_k}{dt} = a(\xi_{k+1}) + a(\xi_{k-1}) - 2a(\xi_k) \\ \xi_k(0) = \xi_k > 0 \end{cases}$$

ここに $\{\xi_k\}$ は stationary sequence.

Prop. 1. により (1.4) は unique solution をもち、

(1.5) $E\, \xi_k^2(t) < +\infty$ も明らか。

$\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{Z}^1}$ の ergodic limit を ξ^* とする。

i.e. $\xi^*(\omega) \equiv {}^{\exists}\lim_{n\to\infty} \sum_{i=-n}^{n} \frac{\xi_i}{2n+1}$

この収束は、$L^2(\Omega)$ でも P-a.s. でも成立つ。

Proposition 2.

(1.4) の解 $\{\xi_k(t)\}_{k\in\mathbb{Z}^1}$ に対し

$\xi_k(t) \longrightarrow \xi^*$ in $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ as $t\to\infty$

特に 初期値 $\{\xi_k\}$ が ergodic ならば、$\xi^* = E\xi_0$ (const.)

になる。

Pf

Step. 1° $X_k(t) = \frac{1}{2k+1}\sum_{i=-k}^{k}\xi_i(t)$ とおくと、

$E(X_k(t)-\xi^*)^2$ は t について、単調減少函数。

∵

$$\frac{d}{dt}E[(X_k(t)-\xi^*)^2] = 2E[X_k(t)\frac{dX_k}{dt}] - 2E[\xi^*\frac{dX_k}{dt}]$$

第2項; $-\frac{2}{2k+1}E[\xi^*\sum_{i=-k}^{k}[a(\xi_{i+1}(t)) + a(\xi_{i-1}(t)) - 2a(\xi_i(t))]]$

初期値 $\xi = (\xi_k)$ に対する解 $\xi(t) = (\xi_k(t))$ を $T_t\xi$ と書き、

$\xi = (\xi_k)$ に対する shift operator を S で表わすと

$T_t S = S T_t$, ところが $\xi^* = S\xi^*$ 従って定常性

より $E[\xi^* a(\xi_{i+1}(t))] = E[\xi^* a(\xi_i(t))]$ ゆえに 第2項 = 0

第1項 < 0 を示そう。

$$E[\sum_{i=-k}^{k}\xi_i(t)\sum_{j=-k}^{k}(a(\xi_{j+1}(t)) + a(\xi_{j-1}(t)) - 2a(\xi_j(t)))]$$

$$= E\left[\sum_{i=-k}^{k} \xi_i(t)\left(\sum_{j=-k+1}^{k+1} a(\xi_j(t)) + \sum_{j=-k-1}^{k-1} a(\xi_j(t)) - 2\sum_{j=-k}^{k} a(\xi_j(t))\right)\right]$$

$$= E\left[\sum_{i=-k}^{k} \xi_i(t)\left(a(\xi_{k+1}(t)) - a(\xi_k(t))\right) - \left(a(\xi_{-k}(t)) - a(\xi_{-k-1}(t))\right)\right]$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=-k}^{k} \xi_{i-1}(t) - \sum_{i=-k}^{k} \xi_i(t)\right) a(\xi_k(t))\right] - E\left[\left(\sum_{i=-k}^{k}(\xi_i(t) - \xi_{i+1}(t))\right) a(\xi_{-k}(t))\right]$$

$$= E\left[(\xi_{-k-1}(t) - \xi_k(t))\, a(\xi_k(t))\right] - E\left[(\xi_{-k}(t) - \xi_{k+1}(t))\, a(\xi_{-k}(t))\right]$$

$$= -E\left[(\xi_{-k}(t) - \xi_{k+1}(t))\left(a(\xi_{-k}(t)) - a(\xi_{k+1}(t))\right)\right]$$

< 0 (∵) 定常性と、aが単調増加 より

Step. 2°

$\forall i, \forall j$, に対し $E[(\xi_i(t) - \xi_j(t))^2] \longrightarrow 0$ as $t \to \infty$

∵ $$E[(\xi_i(t) - \xi_j(t))^2] = 4E[(\xi_i(t) - \xi^*)^2] - E[(\xi_i(t) + \xi_j(t) - 2\xi^*)^2]$$

Step. 1° の証明から、第1項、第2項 は共に単調減少

従って $\exists \lim_{t\to\infty} E[(\xi_i(t) - \xi_j(t))^2] \equiv c$

$c = 0$ をいえばよい。今 $c > 0$ と仮定する。

Step. 1° の計算から $k=0$ として考えると

$$\frac{d}{dt} E[(\xi_i(t) - \xi^*)^2] = -E[(\xi_i(t) - \xi_j(t))(a(\xi_i(t)) - a(\xi_j(t)))]$$

$$\leqq -m E[(\xi_i(t) - \xi_j(t))^2] \leqq -m\, c/2 < 0.$$

∴ for $\forall t \geqq \exists t_0$.

しかし これは $\lim_{t\to\infty} E[(\xi_i(t) - \xi^*)^2] = -\infty$ となり矛盾。

∴ $c = 0$。

Step. 3°

Step. 2° により $\forall k, \forall \varepsilon, \exists t_0(k, \varepsilon)$

$$E[\{(\xi_i(t)-\xi^*)-(\xi_j(t)-\xi^*)\}^2] < \varepsilon, \text{ for } {}^\forall t > t_0, \ -k \leq {}^\forall i, {}^\forall j \leq k.$$

$$\therefore E[(\xi_i(t)-\xi^*)^2] - E[(\xi_i(t)-\xi^*)(\xi_j(t)-\xi^*)] < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} E[(X_k(t)-\xi^*)^2] &= \frac{1}{(2k+1)^2}\sum_{i=-k}^{k}\sum_{j=-k}^{k} E[(\xi_i(t)-\xi^*)(\xi_j(t)-\xi^*)] \\ &\geq \frac{1}{(2k+1)^2}\sum_i\sum_j\left(E[(\xi_i(t)-\xi^*)^2] - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &= E[(\xi_0(t)-\xi^*)^2] - \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Step. 1° より，左辺は t について単調減少。

$$E[(\xi_0(t)-\xi^*)^2] \leq E[(X_k(t)-\xi^*)^2] + \frac{\varepsilon}{2} \leqq E[(X_k(0)-\xi^*)^2] + \frac{\varepsilon}{2}$$

$k \to \infty$ として　$\therefore E[(\xi_0(t)-\xi^*)^2] < \frac{\varepsilon}{2}$ for ${}^\forall t \,{}^\exists\!\!> t_0$.

§. 2 Spitzer の方程式の random modification.

方程式 (1.1) は無限粒子系が相隣り合う粒子とのみ inter-act して，その interaction により互いに衝突することなく，順序を保存する現象をもつ。この意味での random modification は次の形の確率微分方程式と考えられる。

$\{B_t^n\}_{n\in \mathbb{Z}_1}$ は $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の可算無限個の独立な Brown 運動とする．

$$(2.1) \begin{cases} dx_t^n = dB_t^n + a(x_t^n - x_t^{n-1}) - a(x_t^{n+1} - x_t^n)dt \\ \cdots < x_0^{(-1)} < x_0^0 < x_0^1 < x_0^2 < \cdots < x_0^n < \cdots \end{cases}$$

この方程式が order preserving であるためには，Brown 運動に対抗しうる程，drift 係数が作用しなければならない。
そのためには，$a(x)$ は $x=0$ で singular にならざるを得ぬ。

(2.1) を有限粒子系で考えてみよう

$$
(2.2)\quad \begin{cases} dx_t^1 = dB_t^1 - a(x_t^2 - x_t^1)\,dt \\ dx_t^2 = dB_t^2 + a(x_t^2 - x_t^1)\,dt - a(x_t^3 - x_t^2)\,dt \\ \quad\vdots \\ dx_t^{n+1} = dB_t^n + a(x_t^{n+1} - x_t^n)\,dt \end{cases}
$$

まず，$x_t^1 < x_t^2 < \cdots < x_t^n < x_t^{n+1}$ $\forall t$，P-a.s. が成りたつためには，$a(x)$ にどの程度の singularity が必要か？
これは，2ヶの場合の考察から，ほぼ $a(x) \sim x^{-\alpha}$ $(x \downarrow 0)$ $\alpha \geq 1$ になることがわかる。

簡単のために，$a(x) \equiv c \cdot |x|^{-\alpha}$ $(\alpha > 1)$ と仮定する。

$\xi_i(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t)$ とおいて (2.2) を変形すると

$$
(2.3)\quad \begin{cases} d\xi_t^1 = d(B_t^2 - B_t^1) + (2a(\xi_t^1) - a(\xi_t^2))\,dt \\ d\xi_t^2 = d(B_t^3 - B_t^2) + (2a(\xi_t^2) - a(\xi_t^1) - a(\xi_t^3))\,dt \\ \quad\vdots \\ d\xi_t^n = d(B_t^{n+1} - B_t^n) + (2a(\xi_t^n) - a(\xi_t^{n-1}))\,dt \end{cases}
$$

$$\xi_0^i > 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Proposition 3

確率微分方程式 (2.3) は 初期値 $\{\xi_0^i\}$, $\xi_0^i > 0$, $i=1,\cdots,n$ に対して unique solution をもつ。

Lemma

$$A \equiv \sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \partial^2/\partial x_i \partial x_{i+1} + \sum_{i=1}^{n} [2a(x_i) - a(x_{i-1}) - a(x_{i+1})]\partial/\partial x_i$$

に対して 次の条件をみたす函数 f が存在する。 $f \geq 0$.

(i) f は $D \equiv \{(x_1,\cdots,x_n) : x_i > 0, \forall i=1,\cdots,n\}$ 上の smooth function.

(ii) $f = +\infty$ on $\partial D \equiv \{(x_1,\cdots,x_n) : x_i \geq 0, \forall i=1,\cdots,n, x_j = 0, \exists j\}$

(iii) $\exists \{\varepsilon_i\} : \varepsilon_i > 0$

$$Af(x) \leq 0 \text{ on } G \equiv \bigcup_{i=1}^{n} \{(x_1,\cdots,x_n) \in D, 0 < x_i < \varepsilon_i\}$$

Pf of Lemma.

$f(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^{-(\alpha-1)}$ は上の条件をみたす。(計算は少しめんどう。)

Prop. 3 の Pf

∂D に達するまでは unique sol. が存在するので

D から出た解は ∂D に達しないことを示せば十分。

$G_m \equiv \{(x_1,\cdots,x_n) \in G \; ; \; \frac{1}{m} < x_i, \forall i=1,\cdots,n\}$

$\tau = \inf\{t>0, \xi_t \notin G\}$ $\quad \tau_m = \inf\{t>0, \xi_t \notin G_m\}$

$\xi_0 \in G$ とする。 A は (2.3) の generator だから

Lemma の f に対して

$E[f(\xi_{t\wedge\tau_m})] \leq f(\xi_0) < +\infty$

$m \to \infty$, $t \to \infty$ とすれば $P[\xi_\tau \in \partial D \; ; \; \tau < +\infty] = 0$

このことは，Gから出発した solution は決して∂Dに到達しないことを意味する。

問題：方程式 (2.1) がどのような初期値の class で order-preserving solution を持つか？

次にもう1つの無限次元確率微分方程式を考えよう。

$$(2.4)\quad \begin{cases} dx_t^n = dB_t^n + \sum_{j:j\neq n} F(x_s^j - x_s^n)ds \\ \qquad n=0,\pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases}$$

ここで F は compact supported かつ Lipshitz 連続とする。この方程式に意味をもたせるためには，R^1の局所有限な可算集合のてきとうな sub-class をえらぶことにより，$\sum_{j:j\neq n}$ は実際は有和個の和となるように設定する必要がある。

問題：方程式 (2.4) が unique solution をもつためにR^1上の configulation の空間を定めよ。

この方程式は Gibbs ensemble との関係で非常に重要な意味をもつ。今 (2.4) を有限系の場合に考えよう。

$$(2.5)\quad \begin{cases} dx_t^i = dB_t^i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} F(x_t^j - x_t^i)dt \\ \qquad i=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

(2.5) は unique solution をもち，diffusion process が対応することは明らかだろう。

U を binary potential function. i.e. $U(x)$ は even fun とする。

<u>Proposition. 4</u>

$F \equiv U'$ が C^1-class とする。その時 (2.5) に対応する diffusion は U から定まる Gibbs ensemble を不変測度にもつ。i.e. $q(x_1, \cdots, x_n) = \exp[-\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} U(x_i - x_j)]$ とおくと $q(x)dx$ は diffusion の不変測度になる。

<u>Pf</u>

(2.5) の generator $A = \frac{1}{2}\Delta + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} F(x_j - x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}$ に対して $A^* q \equiv 0$ を示せば十分。

$$A^* q = \frac{\Delta}{2} q - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[\sum_{j:j\neq i} F(x_j - x_i) q]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}[(-\sum_{j:j\neq i} U'(x_i - x_j) + \sum_{j:j\neq i} U'(x_j - x_i)) q(x)]$$

$$- \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}[\sum_{j:j\neq i} F(x_j - x_i) q(x)]$$

$-U'(x_i - x_j) = U'(x_j - x_i) = F(x_j - x_i)$ だから

$A^* q(x) \equiv 0$

(注) 方程式 (2.5) に対応する diffusion process は time-reversible になっている。