数理解析研究所講究録
第139巻 1972年 1-6

一方向に伝わる水面波　（概要）

東大 宇宙研 橋本 英典

一定の深さの水面に生じる一次元伝播波は古典的な問題であるが、最近格子振動[3),4)]やプラズマの波[5)]などと関連して再びみなおされるに至った。本稿の内容はすでに科学 Vol. 40 (1970) 401にくわしくのべてあるので概略をこゝに記す。

(I) 基礎方程式

深さ$y=-h$の水面を水平(x)方向に伝播する波は、渦なし非粘性の假定のもとに速度ポテンシャル$\Phi(x,y,t)$と水面の盛り上り$y=\eta(x,t)$に対する変分原理

$$\delta L=0\ ;\ L=\int dt\left[\int dx\int_{-h}^{\eta} p(x,y,t)\,dy+\gamma\int(1+\eta_x^2)^{\frac{1}{2}}dx\right] \quad (1)$$

によって記述される。たゞしγは表面張力；pは圧力で、gを重力の加速度、ρを水の密度とすれば　Φと圧力方程式

$$p=-\rho\left[\Phi_t+\frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,\Phi)^2+gy\right] \quad (2)$$

によって結びついている。流体内のΦ変分から

$$\Delta\Phi\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi=0 \quad (3)$$

η、そして$y=\eta$でのΦの変分からそれぞれ水面$y=\eta$での境界條件：　圧力の釣合

$$\frac{p}{\rho}=-\frac{\gamma}{\rho R}=-\frac{\gamma}{\rho}\eta_{xx}/(1+\eta_x^2)^{3/2}\ :\ y=\eta(x,t) \quad (4)$$

と運動学的條件

$$\Phi_y = \eta_t + \Phi_x \eta_x \qquad : \; y = \eta(x, t) \qquad (5)$$

とがある。また水底では(5)に対應して

$$\Phi_y = 0 \qquad : \; y = -h \qquad (6)$$

が満足されなければならない。

未知数Φ, η に対して(3), (6) は線型だが(4), (5)の境界條件は非線型であり、Trivial な解Φ, $\eta = 0$ 以外の解を求める非線型の固有値問題を提供する。

$\eta = \eta(\theta)$, $\theta = kx - \omega t + \alpha$, $\eta(\theta + \theta_0) = \eta(\theta_0)$, α, θ_0 一定の型の解を進行定常波という。特に微少振巾波では、ηはθの正弦関数 $\eta = \frac{1}{2}a\cos\theta$ で ω と k の間には分散関係 $\omega = \omega(k)$ の存在が知られ、位相速度 $C = \omega/k$ は一般に波数の関数であって、有限振幅波（代表振幅を a としよう）が存在するためには、それをフーリエ分解した成分正弦波の分散が非線型項によってバランスしていなくてはならない。

(II) 伝播波の例

	C_0 $(a \to 0)$	C（有限振幅）
淺水波 $(kh \ll 1)$	$\sqrt{gh}$	$\sqrt{g(h+\eta)}$
深水重力波 $(kh \gg 1)$	$\sqrt{g/k}$	$C_0(1+\frac{1}{8}k^2a^2+\cdots) \leqq \sqrt{1.2}$ $(a = 0.142\lambda)$ Stokes Michel (1893)
有限深重力波	$\sqrt{(g/k)\tanh kh}$	

表面張力波 ($kh \gg 1$, $\frac{\gamma k^2}{\rho g} \gg 1$) $\sqrt{\gamma k/\rho}$ $c_0\left(1+\frac{1}{16}k^2a^2\right)^{-\frac{1}{4}}$ ($a = -0.73\lambda$) [7]

重力表面張力波 $\sqrt{\left(\frac{\gamma k}{\rho} + \frac{g}{k}\right) \tanh kh}$

有限振幅となると、浅水波では丸の大きいところの伝播速度が小さいところより速く、波のつゝ立ち、さらにくだけがおこる。またkaの増加と共に、表面張力波はくぼみ波だが谷底が上方で接近して気泡が入り込んだ形となり、また重力波では波頂角が$120°$という三角波となって、それ以上の振幅の波は存在しない。また$kh \geq 1.363$の重力波が位相の攪乱に対し Modulation Instability をおこすことは$kh \to \infty$に対して Lighthill, Whitham, Benjamin, Feir,[11,14] kh有限については Benjamin[14] によって指適された。実際B.Fの深い水槽実験によって$kh \gg 1$についてたしかめられている。また表面張力波はその位相速度〜波数曲線が単調でなく極小を示すことから、1つのCに対し2つの$k = n^{\pm 1} k_*$が可能で、nが整数に近いと1つの波長の中にnこのくぼみを持つ有限振幅波を生じる。これは 1915年 Wilton によって指適され 1960年 Schooloy によって観測されている。

以上の有限振幅波の理論的研究は stretched variable, multiple scale scale variable, PLK 法, Bogoliubov 法などの特異攝動法の好個の実例である。

(III) Korteveg - de Vries の方程式とその拡張

浅水波は a/h 有限 $kh\to 0$ の極限であるが、これだと波がくだけてしまい water jump (水面衝撃波) や Bore には適切であるが Russel が観測した左右対称の孤立波は説明できない。Rayleigh, Boussinesq を経て Korteweg と de Vries (1895) は適当な極限 $\delta=a/h\sim(kh)^2\ll 1$ の下にそれを説明する方程式を導いた。x 方向に速さ $c_0=\sqrt{gh}$ で進む系から見て、水平方向に $1/k$, 鉛直方向に h の長さ、$a/(khc_0)$ の時間の単位をとり、上記の極限をとれば

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{3}{2}\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(\beta-\frac{1}{3}\right)\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}$$

$$\beta=\gamma/(\rho g h^2) \qquad (7)$$

が得られる。$\eta\to 0$ で位相速度が

$$C_0=C_0\left[1+\left(\beta-\frac{1}{3}\right)k^2h^2+(k^4h^4)\right] \qquad (8)$$

であり群速度が

$$kC'=C_0\left(\beta-\frac{1}{3}\right)k^2h^2 \qquad (9)$$

となることからわかるように、系から見て $\frac{3}{2}\eta$ のはやさの波の convection と kh を小さいか有限で $(a/h)^{\frac{1}{2}}$ の程度としたことによる分散効果が balance して安定なパルス波やつらなり波の存在を可能にする。そのさい $\beta<\frac{1}{3}$ ならば山が高く谷が浅く、(重力がきくとき) $\beta>\frac{1}{3}$ (表面張力がきくとき) 谷が深く山が浅くなることが示される。これは $|\beta-1/3|$ の同一値では変換 $x\to -x$, $\eta\to-\eta$ に対して KdV 式が不変なことからも明らかである。

$\beta\sim\frac{1}{3}$のばあいは分散効果が小さく、振幅がもっと小さくなって、上記の釣合が存在するはずである。実際cについてk^4h^4の項までとり入れ、($c^2=c_0^2[1+(\beta-\frac{1}{3})k^2h^2+(\frac{2}{15}-\frac{\beta}{3})k^4h^4]$)さらなる stretching $\beta-\frac{1}{3}=\sigma\delta$, $\eta_1=\eta/\delta$, $\tau_1=\delta t$ を行なうと

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial\tau_1}+\frac{3}{2}\eta_1\frac{\partial\eta_1}{\partial x}=\sigma\frac{\partial^3\eta_1}{\partial x^3}-\frac{1}{90}\frac{\partial^5\eta_1}{\partial x^5} \qquad (10)$$

を得る。[16] $\sigma=0$のものはプラズマ中の磁場と適当な角をなす有限振幅波について角谷、小野氏によって導かれたものと同形である。

文献

古い結果については(1932年以前)(1)にくわしいので、それに出ているものは割愛する。1956年以前(重力波)は(2)にくわしい。

(1) H.Lamb : Hydrodynamics, Cambridge Univ. Press (1932) ; Dover Publications, New York (1945) (2) J.J.Stoker : Water Waves, Interscience Publishers, Inc., New York (1957) (3) たとえば戸田盛和：波のかたまり— Soliton, 科学, 38, 346 (1968) (4) 斉藤信彦, 廣岡一：非線形格子振動と計算機実験, ibid. (5) たとえば T.Kakutani, H.Ono, T.Taniuti & C.C.Wei : J. Phys. Soc. Japan, 24, 1159 (1968) (6) Y.P.Krasovskii : Dokl. Akad. Nauk, SSSR, 130, 1237 (1960) (7) G.D.Crapper : J. Fluid Mech., 2, 532 (1957) (8) A.H.Schooley: J. Geophys. Res., 65, 4075 (1960) (9) W.J.Pierson Jr. & P.Fife : ibid., 66,

163 (1961) (10) A.H.Nayfeh : Phys. of Fluids, 13, 545 (1970) : " : J. Fluid Mech., 40, 671 (1970) (11) M.J.Lighthill & G.B.Whitham : Proc. Roy. Soc., A229 (1955) ; M.J.Lighthill : J. Inst. Math. Applics 1,(1965) ; ; Proc. Roy. Soc. 299, 237 (1967) ; G.B.Whitham : ibid., 6 (1967)

(12) G.Birkohff : Hydrodynamics, Princeton Univer. Press, P. 23 (1960)

(13) T.Kakutani & H.Ono : J. Phys. Soc. Japan, 26, 1305 (1969) (14) T.B.Bemjamin & J.E.Feir : J. Fluid Mech., 27, 417 (1967) ; T.Benjamin : Proc. Roy. Soc., A299, 59 (1967). この号は分散性非線型波の特集号である。 (15) 傾いた壁を落下する薄膜では粘性が効いて、右辺が4階になる。 T.Takaki : J. Phys. Soc. Japan, 27, 1648 (1969)

(16) H.Hasimoto : 未発表