数理解析研究所講究録
第139巻 1972年 7-24

Lagrange座標による水面波の解析

東大 工学部 桑原 真二

§1、序

普通、水面波の解析はEuler座標によっておこなわれる。水面の形を $x_2=\eta(x_1, t)$ とおき、η および $\partial\eta/\partial x_1$ 等が小さいとして摂動法をもちいる。 ここで (x_1, x_2, t) はEuler座標と時間、x_2 は鉛直上方にとってある。

碎波 breaking of water wave の問題では、非線形効果によって、波形はきわだち、$\partial\eta/\partial x_1$ はついに∞になり、それ以後は η が3価となる。このような状況ではもはや今までの解析法を用いることができない（図1）。

Lagrange座標をもちいれば、流体粒子の初期の座標と時間 (a_1, a_2, s) が独立変数となり、任意時刻の流体粒子の座標 (x_1, x_2) は従属変数となる。 水－空気の境界にある流体粒子が常に境界にあるとすれば、Lagrange座標では時間的に固定した境界をもつ初期値－境界値問題として波の問題をあつかうことができる。 それ故上に述べた $\partial\eta/\partial x_1$ が無

限大になることおよび、ζが3価になるという解析上の困難は解消する。

§2. 基礎方程式

縮まない完全流体の渦なし運動は

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}=0,\quad (\mathrm{rot}\,\mathbb{v}=0), \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}=0,\quad (\mathrm{div}\,\mathbb{v}=0), \tag{2.2}$$

であらわされる。こゝで(v_1, v_2)は速度のEuler座標成分である。

渦なしの条件(2.1)は、速度ポテンシャルΦを導入することにより、すなわち

$$v_\alpha=\frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha},\qquad (\alpha=1,2), \tag{2.3}$$

により満足される。非圧縮の条件(2.2)より

$$\Delta\Phi\equiv\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_\alpha\,\partial x_\alpha}=0, \tag{2.4}$$

がでる。

Eulerの運動方程式の積分は一般化されたBernoulliの方程式：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + g x_2 = F(t), \qquad (2.5)$$

を与える。 p, ρ は圧力と密度, g は重力の加速度である。

Lagrange 座標 (a_1, a_2, s) は Euler 座標 (x_1, x_2, t) と

$$x_\alpha = x_\alpha(a_1, a_2, s),$$

$$t = s,$$

によって関係づけられているとする。 独立変数を (x_1, x_2, t) から (a_1, a_2, s) に変換しよう。 微分の変換は

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{1}{J}\frac{\partial(\ \ , x_2)}{\partial(a_1, a_2)}, \qquad (2.7\,a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{J}\frac{\partial(x_1,\ \ )}{\partial(a_1, a_2)}, \qquad (2.7\,b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{J}\frac{\partial(x_1, x_2,\ \ )}{\partial(a_1, a_2, s)}, \qquad (2.7\,c)$$

$$J \equiv \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(a_1, a_2)}, \qquad (2.7\,d)$$

で与えられる.

非圧縮の条件 (2.2) は (2.7a, b) をもちいて

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(a_1, a_2)} = 0, \qquad (2.8)$$

となる。 こゝで

$$v_\alpha = \frac{\partial x_\alpha}{\partial s}, \qquad (2.9)$$

をもちいた。　(2.8) を積分して、$J \equiv \partial(x_1, x_2)/\partial(a_1, a_2) = f(a_1, a_2)$ をうるが、初期条件：$f = 1$ を課すれば

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(a_1, a_2)} = 1, \tag{2.10}$$

をうる。

渦なしの条件は (2.3) をもちいれば自動的に満足されるから、(2.9) と共に

$$\frac{\partial x_1}{\partial s} = \frac{\partial(\Phi, x_2)}{\partial(a_1, a_2)}, \tag{2.11a}$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial s} = \frac{\partial(x_1, \Phi)}{\partial(a_1, a_2)}, \tag{2.11b}$$

を与える。

Bernouilleの方程式は

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \Phi)}{\partial(a_1, a_2, s)} + p/\rho + \frac{1}{2}v^2 + g x_2 = F(s), \tag{2.12}$$

とかきあらためられる。　(2.10) と (2.11) が基礎方程式である。　(2.12) は境界条件にもちいられる。

§3.　砕波の数学的モデル

砕波の現象は有限振巾の波が非線形と重力の作用によって変形し、くずれるものと考えられる。　砕波のこのような

+

作用を解析的にしらべるためにわれわれは次のような数学的モデルを考える.

波形をかえず一方向に進行する波はGalilei 変換によって定常な流れになる。 $t<0$ では波形壁（上面）と直線壁（下面）で境されたダクトに渦なしの殆んど一様な流れがあるとする。 $t=0$ で上の波形壁をとりはらい、$t>0$ における流れを考える.

$t<0$ で定常流となるように sliding Lagrange 座標 (b_1, b_2, σ) を導入する：

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= a_1 + cs, \\ b_2 &= a_2, \\ \sigma &= s, \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

こゝで c は $t<0$ での波形壁の速さである。 (a_1, a_2, s) から (b_1, b_2, σ) へ独立変数を変換すれば、微分は

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_1} &= \frac{\partial}{\partial b_1}, \\ \frac{\partial}{\partial a_2} &= \frac{\partial}{\partial b_2}, \\ \frac{\partial}{\partial s} &= c\frac{\partial}{\partial b_1} + \frac{\partial}{\partial \sigma}, \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

と変換される（図 2）.

同じ文字をつかって無次元の量をあらわすことにする。すなわち

$$\left.\begin{array}{lcl} v_\alpha / c & \longrightarrow & v_\alpha , \\ x_\alpha / h & \longrightarrow & x_\alpha , \\ b_\alpha / h & \longrightarrow & b_\alpha , \\ c\sigma / h & \longrightarrow & \sigma , \\ \Phi / hc & \longrightarrow & \Phi , \\ a / h & \longrightarrow & a \ (\text{初期の波の振巾}), \\ kh & \longrightarrow & k \ (\text{初期の波の波数}), \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

こゝでhはダクトの深さである。

基礎方程式(2.10),(2.11)は(3.2),(3.3)をもちいて無次元形にかきあらためられる。

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(b_1, b_2)} = 1 , \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial b_1} + \frac{\partial x_1}{\partial \sigma} = \frac{\partial(\Phi, x_2)}{\partial(b_1, b_2)} , \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial b_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \sigma} = \frac{\partial(x_1, \Phi)}{\partial(b_1, b_2)} , \tag{3.6}$$

さて、境界条件は上の砕波のモデルについて

$$b_2 = -1 : \qquad x_2 = -1 , \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial b_1} + \frac{\partial x_1}{\partial \sigma} = \frac{\partial \Phi}{\partial b_1} \frac{\partial x_2}{\partial b_2} , \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial(x_1, \Phi)}{\partial(b_1, b_2)} = 0 , \tag{3.9}$$

$$b_2=0:\qquad x_2=-\alpha\cos kx,\qquad (t<0),\qquad (3.10a)$$

$$\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(b_2,\sigma)}\frac{\partial\Phi}{\partial b_1}+\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(\sigma,b_1)}\frac{\partial\Phi}{\partial b_2}+\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial x_1}{\partial b_1}+\frac{\partial x_1}{\partial\sigma}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial x_2}{\partial b_1}+\frac{\partial x_2}{\partial\sigma}\right)^2\right\}+\beta x_2=\frac{1}{2},\quad \beta\equiv gh/c^2,\qquad (3.10b)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial b_1}+\frac{\partial x_1}{\partial\sigma}=\frac{\partial(\Phi,x_2)}{\partial(b_1,b_2)},\qquad (3.11)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial b_1}+\frac{\partial x_2}{\partial\sigma}=\frac{\partial(x_1,\Phi)}{\partial(b_1,b_2)},\qquad (3.12)$$

となる。

$t<0$における境界条件（3.10a）がb_1方向に周期的であるので、解は周期的と考えてよい。そこでわれわれは$b_1=0$と$b_1=2\pi/k$との間の領域にのみ注目することにする。左右の仮想の境界における周期条件は

$$x_1^L=x_1^R-2\pi/k,\qquad (3.13)$$

$$x_2^L=x_2^R,\qquad (3.14)$$

$$\Phi^L=\Phi^R-2\pi/k,\qquad (3.15)$$

$$\frac{\partial x_1^L}{\partial b_1}=\frac{\partial x_1^R}{\partial b_1},\qquad (3.16)$$

$$\frac{\partial x_2^L}{\partial b_1}=\frac{\partial x_2^R}{\partial b_1},\qquad (3.17)$$

$$\frac{\partial \Phi^L}{\partial b_1}=\frac{\partial \Phi^R}{\partial b_1},\qquad (3.18)$$

である。こゝで

$$x_1^L=x_1(0,b_1,\sigma),$$

$$\chi_1^R = \chi_1(2\pi/k,\ b_2,\ \sigma),$$

等である．

まず $t<0$ の解を，基礎方程式（3.4）－（3.6）で $\partial/\partial\sigma=0$ とおいて、境界条件（3.7）－（3.9），（3.10 a）（3.11），（3.12） 周期条件（3.13）－（3.18）のもとに解く。ついで $t>0$ の解は $\partial/\partial\sigma$ をのこした基礎方程式を（3.10 a）の代りに（3.10 b）をもちいた境界条件、周期条件のもとで，上にもとめた（$t<0$ の）解を初期条件として解くことになる。

§4、 逐次近似法

上の初期値－境界値問題は非線形なので数値計算によって解くのがもっとも適していると思われる． しかし波形の振巾が小さい場合には摂動法をもちいて解くことができ，古典的解析と比較することによって、この解析の性質がはっきりするものと思われる。

さて

$$\chi_1 = b_1,\quad \chi_2 = b_2,\quad \Phi = b_1, \qquad (4.1)$$

とおけば、基礎方程式を満足し，一様な流れをあらわす。しかし，上面の境界条件（3.10 a）は満足していない。そこで

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_1 + \alpha x_1^{(1)} + \alpha^2 x_1^{(2)} + \cdots , \\ x_2 &= b_2 + \alpha x_2^{(1)} + \alpha^2 x_2^{(2)} + \cdots , \\ \Phi &= b_1 + \alpha \Phi^{(1)} + \alpha^2 \Phi^{(2)} + \cdots , \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

とおき、摂動法をもちいる。　こゝで $x_1^{(1)}$ 等は (b_1, b_2, σ) の関数と考える。

第1近似では

基礎方程式：

$$\frac{\partial x_1^{(1)}}{\partial b_1} + \frac{\partial x_2^{(1)}}{\partial b_2} = 0 , \tag{4.3}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial b_1} + \frac{\partial}{\partial \sigma}\right) x_1^{(1)} - \frac{\partial x_2^{(1)}}{\partial b_2} - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial b_1} = 0 , \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial x_1^{(1)}}{\partial b_2} + \left(\frac{\partial}{\partial b_1} + \frac{\partial}{\partial \sigma}\right) x_2^{(1)} - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial b_2} = 0 , \tag{4.5}$$

境界条件：

$b_2 = -1$:

$$x_2^{(1)} = 0 , \tag{4.6}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial b_1} + \frac{\partial}{\partial \sigma}\right) x_1^{(1)} - \frac{\partial x_2^{(1)}}{\partial b_2} - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial b_1} = 0 , \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial b_2}\left(x_1^{(1)} - \Phi^{(1)}\right) = 0 , \tag{4.8}$$

$b_2 = 0$:

$$x_2^{(1)} = -\cos k b_1 \quad (t \leq 0) , \tag{4.9a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial b_1} + \frac{\partial}{\partial \sigma}\right) x_1^{(1)} + \beta x_2^{(1)} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \sigma} = 0 , \; (t > 0) , \tag{4.9b}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial b_1} + \frac{\partial}{\partial \sigma}\right) x_1^{(1)} - \frac{\partial x_2^{(1)}}{\partial b_2} - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial b_1} = 0 , \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial b_1} + \left(\frac{\partial}{\partial b_1} + \frac{\partial}{\partial \sigma}\right)\chi_2^{(1)} - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial b_2} = 0, \qquad (4.11)$$

周期条件：

$$\chi_1^{(1)L} = \chi_1^{(1)R}, \quad \chi_2^{(1)L} = \chi_2^{(1)R}, \quad \Phi^{(1)L} = \Phi^{(1)R}, \qquad (4.12)\sim(4.14)$$

$$\frac{\partial \chi_1^{(1)L}}{\partial b_1} = \frac{\partial \chi_1^{(1)R}}{\partial b_1}, \quad \frac{\partial \chi_2^{(1)L}}{\partial b_1} = \frac{\partial \chi_2^{(1)R}}{\partial b_1}, \quad \frac{\partial \Phi^{L}}{\partial b_1} = \frac{\partial \Phi^{R}}{\partial b_1}, \qquad (4.15)\sim(4.17)$$

となる。

$t<0$ の解は $\partial/\partial\sigma = 0$ とおいて容易にえられ

$$\chi_1^{(1)} = \frac{1}{\sinh k}\sin k b_1 \cosh k(1+b_2), \qquad (4.18)$$

$$\chi_2^{(1)} = -\frac{1}{\sinh k}\cos k b_1 \sinh k(1+b_2), \qquad (4.19)$$

$$\Phi^{(1)} = \frac{2}{\sinh k}\sin k b_1 \cosh k(1+b_2), \qquad (4.20)$$

となる。　この解は上面が波形壁、下面が平面壁のダクトの中の流れとして求めたものである。　この解を自由表面の境界条件（3.10 b）に入れてみると

$$\sigma = k \coth k, \qquad (4.21)$$

のとき満足される。　これを次元のある形に書きあらためると、有限深さの無限小振巾の自由表面波の分散関係式：

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh kh}, \qquad (4.22)$$

がえられる。すなわち、平均流速$\sqrt{g\tanh kh/k}$のダクトの流れは上の波形壁をとりはらっても自由表面としてそのまゝの波形で定常流となる。 Galilei 変換をして考えれば、止った流体の上に$\sqrt{g\tanh kh/k}$の速さで波形壁を動かし、それからこの波形壁をとりはらってしまえば、そのまゝの波形をかえない一方向の進行波がえられる。

波形壁を(4.22)以外の速さで動かし、$t=0$でこの波形壁をとりさったらどうなるであろうか。 波の発展をしらべるためには、基礎方程式(4.3)—(4.5)を境界条件(4.6)—(4.11)((4.9a)の代りに(4.9b)をもちいる)と周期条件(4.12)—(4.17)および初期条件(4.18)—(4.20)のもとに解かなければならない。

基礎方程式(4.3)—(4.5)は

$$\left(\frac{\partial}{\partial b_1}+\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\Delta\chi_2^{(1)}=0,\qquad \Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial b_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial b_2^2},\tag{4.23}$$

$$\Delta\left(\chi^{(1)}+\Phi^{(1)}\right)=0,\tag{4.24}$$

とかれる。 境界条件(4.6)および初期条件(4.19)を考慮して(4.23)の解は

$$\chi_2^{(1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n(\sigma)\cos nkb_1+A_{2n}(\sigma)\sin nkb_1\right\}\sinh nk(1+b_2)$$
$$-\left(\frac{1}{\sinh k}+A_{11}(0)\right)\cos k(b-\sigma)\sinh k(1+b_2),\tag{4.25}$$

および

$$A_{1n}(0)=0, \qquad n \geq 2, \tag{4.26}$$

$$A_{2n}(0)=0, \qquad \text{すべての } n \text{ に対して}, \tag{4.27}$$

をうる。

(4.25) を (4.3) に代入し、積分して初期条件 (4.18) をもちいて $x_1^{(1)}$ をもとめると

$$x_1^{(1)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\{A_{1n}(\sigma)\sin nkb_1-A_{2n}(\sigma)\cos nkb_1\}\cosh nk(1+b_2)$$
$$+\left(\frac{1}{\sinh k}+A_{11}(0)\right)\sin k(b_1-\sigma)\cosh k(1+b_2)$$
$$+G(b_2,\sigma), \tag{4.28}$$

$$G(b_2,\ 0)=0, \tag{4.29}$$

をうる。こゝで $G(b_2,\sigma)$ は b_2, σ の任意関数である。

(4.24) からあきらかなように $\Phi^{(1)}$ と $x_1^{(1)}$ との差は調和関数である。そこで境界条件 (4.6) と初期条件 (4.20) を考慮して

$$\Phi^{(1)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\{(A_{1n}(\sigma)-B_{1n}(\sigma))\sin nkb_1-(A_{2n}(\sigma)-B_{2n}(\sigma))$$
$$\cos nkb_1\}\cosh nk(1+b_2)+\left(\frac{1}{\sinh k}+A_{11}(0)\right)$$
$$\sin k(b_1-\sigma)\cosh k(1+b_2)+G(b_2,\sigma), \tag{4.30}$$

および

$$B_{1n}(0)=0, \qquad \text{すべての } n \text{ について}, \tag{4.31}$$

$$B_{2n}(0)=0, \qquad すべてのnについて, \qquad (4.32)$$

をうる。

次に(4.48), (4.30)を(4.4)に代入すると

$$\frac{\partial G(b_2, \sigma)}{\partial \sigma}=0, \qquad (4.33)$$

をうる。初期条件(4.29)からあきらかに

$$G(b_2, \sigma)\equiv 0, \qquad (4.34)$$

である。

まだ満足されていない境界条件をかつて

$$\dot{A}_{1n}+nk(A_{2n}+B_{2n})=0, \qquad (4.35)$$

$$\dot{A}_{2n}+nk(A_{1n}+B_{1n})=0, \qquad (4.36)$$

$$\dot{B}_{1n}+(nk+\beta\tanh nk)A_{2n}+2nkB_{2n}=0, \qquad (4.37)$$

$$\dot{B}_{2n}-(nk+\beta\tanh nk)A_{1n}+2nkB_{1n}=0, \qquad (3.38)$$

および

$$A_{11}(0)=-\frac{1}{\sinh k}, \qquad (3.39)$$

をうる。初期条件(4.39), (4.26), (4.27), (4.31), (4.32)をもちいてA_{1n}等を求めることができる。結果はA_{11}, A_{21}, B_{11}, B_{21}以外は恒等的に0となる。

最後に波の発展の模様は第1近似で

$$x_1^{(1)}=-[A_1\sin(kb_1+\lambda+\sigma)+A_2\sin(kb_1-\lambda+\sigma)$$

$$+A_3\sin(kb_1+\lambda_-\sigma)+A_4\sin(kb_1-\lambda_-\sigma)\Big]\cosh k(1+b_2), \qquad (4.40)$$

$$X_2^{(1)}=\Big[A_1\cos(kb_1+\lambda_+\sigma)+A_2\cos(kb_1-\lambda_+\sigma)$$
$$+A_3\cos(kb_1+\lambda_-\sigma)+A_4\cos(kb_1-\lambda_-\sigma)\Big]\sinh k(1+b_2), \qquad (4.41)$$

$$\Phi^{(1)}=-\Big[B_1\sin(kb_1+\lambda_+\sigma)+B_2\sin(kb_1-\lambda_+\sigma)$$
$$+B_3\sin(kb_1+\lambda_-\sigma)+B_4\sin(kb_1-\lambda_-\sigma)\Big]\cosh k(1+b_2), \qquad (4.42)$$

こゝで

$$A_i=\frac{1}{2(\lambda_i^2-\lambda_{-i}^2)\sinh k}\left\{\lambda_{-i}^2+\frac{\lambda_i+3(-1)^i k}{\lambda_i}k(k-\beta\tanh k)\right\}, \qquad (4.43)$$

$$B_i=\frac{1}{2(\lambda_i^2-\lambda_{-i}^2)\sinh k}\left\{\lambda_{-i}^2+\frac{(-1)^i(\lambda_{-i}^2-3k^2)-\lambda_{-i}k}{\lambda_i}\right.$$
$$\left.(k-\beta\tanh k)+(-1)^i\frac{k}{\lambda_i}(k-\beta\tanh k)^2\right\} \qquad (4.44)$$

$$\left.\begin{array}{llll}\lambda_i=\begin{cases}\lambda_+\\ \lambda_-\end{cases} & \lambda_{-i}=\begin{cases}\lambda_-\\ \lambda_+\end{cases} & \begin{array}{l} i=1,2;\\ i=3,4;\end{array}\\ \lambda_\pm=\sqrt{\frac{k}{2}}\left\{7k+2\beta\tanh k\pm3\sqrt{k(5k+4\beta\tanh k)}\right\}^{1/2}, & & \end{array}\right\} \qquad (4.45)$$

である。

(4.40)−(4.42)の解から，$t=0$で上面の波形壁をとりはらうと（$\beta\neq k\tanh k$）.

$$\left.\begin{array}{l}\sin(kb_1 \pm \lambda_+ \sigma) \\ \sin(kb_1 \pm \lambda_- \sigma)\end{array}\right\} \qquad (4.46)$$

の形の4つの波が発生することがわかる。

自由表面をつたわる無限小振巾の波の場合、すなわち分散関係式 $\beta = k\coth k$ を満足する場合には、(4.40)－(4.42) の解は (4.18)－(4.20) に帰着されることがわかる。
$\beta \longrightarrow k\coth k$ の極限では

$$\lambda_+ \longrightarrow 3k, \qquad \lambda_- \longrightarrow 0, \qquad (4.47)$$

となる。　こゝで

$$\lim_{\beta \to k\coth k} \frac{k - \beta\tanh k}{\lambda_-} = -3,$$

である。

§5、あとがき

この論文では、Euler座標では変形する境界をもつ初期値一境界値問題が、Lagrange座標をもちいれば固定境界の初期値一境界値問題に帰着される利点をもちいて、砕波の問題を定式化した。　数値計算によって詳細な計算が行わるべきであるが、初期の振巾が小さいとして摂動法をもちい、才1近似の解析解をえした。　しかし非線形にもとづく波形のくずれは才2近似まですゝまなければあらわれない。

なおこの方法によってKortweg-de Vriese方程式がどのようにしてみちびかれるか、K.d.V.方程式の厳密解であるsoliton や cnoidal wave はどのようにとりあつかえるか等の問題も考えられる。

なお、Biesel[1]は sloping beach における砕波を数値計算している(3)のp306-7)。

1) Biese., F.: Study of wave propagation in water of gradually varying depth, NBS Cirlular 521, 1952.

2) Lamb, H.: hydrodynamics, 1932, Cambridge U. P.,

3) Stoker, J. J.: Water Waves, 1957, Intersci. Publ.

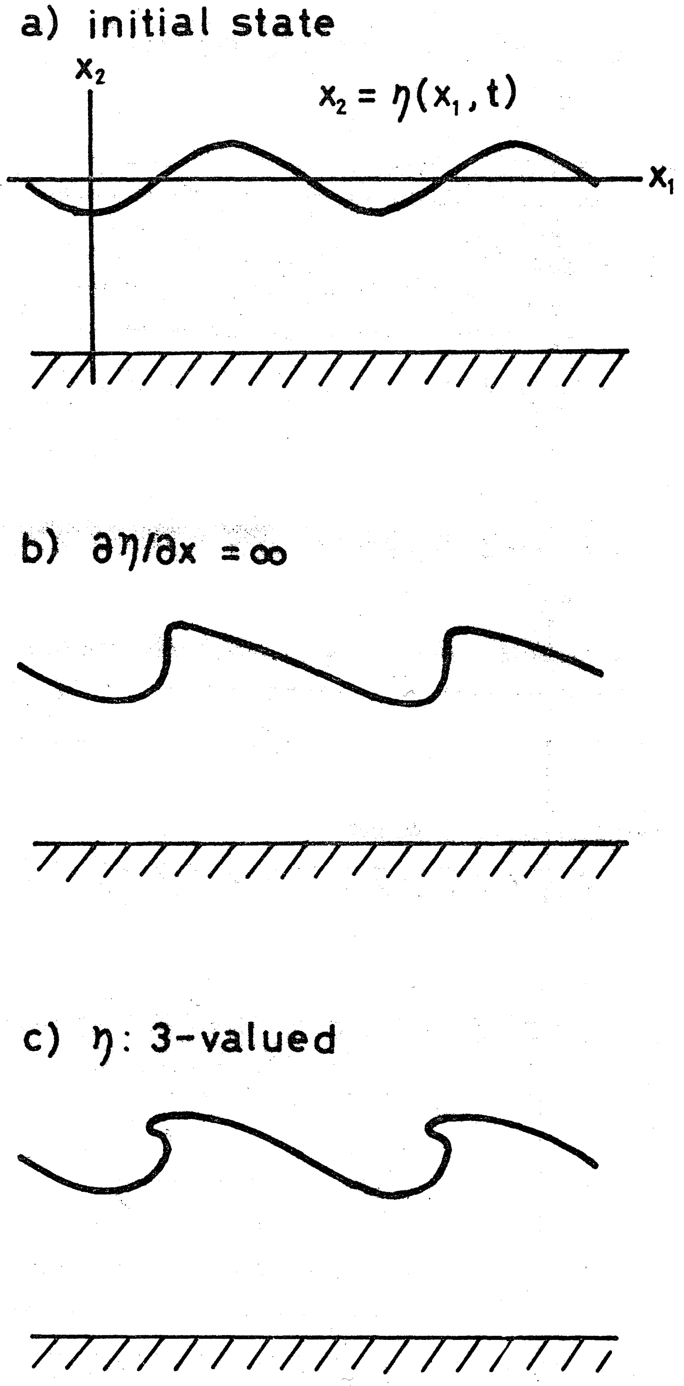

Fig. 1. Developing of water wave.

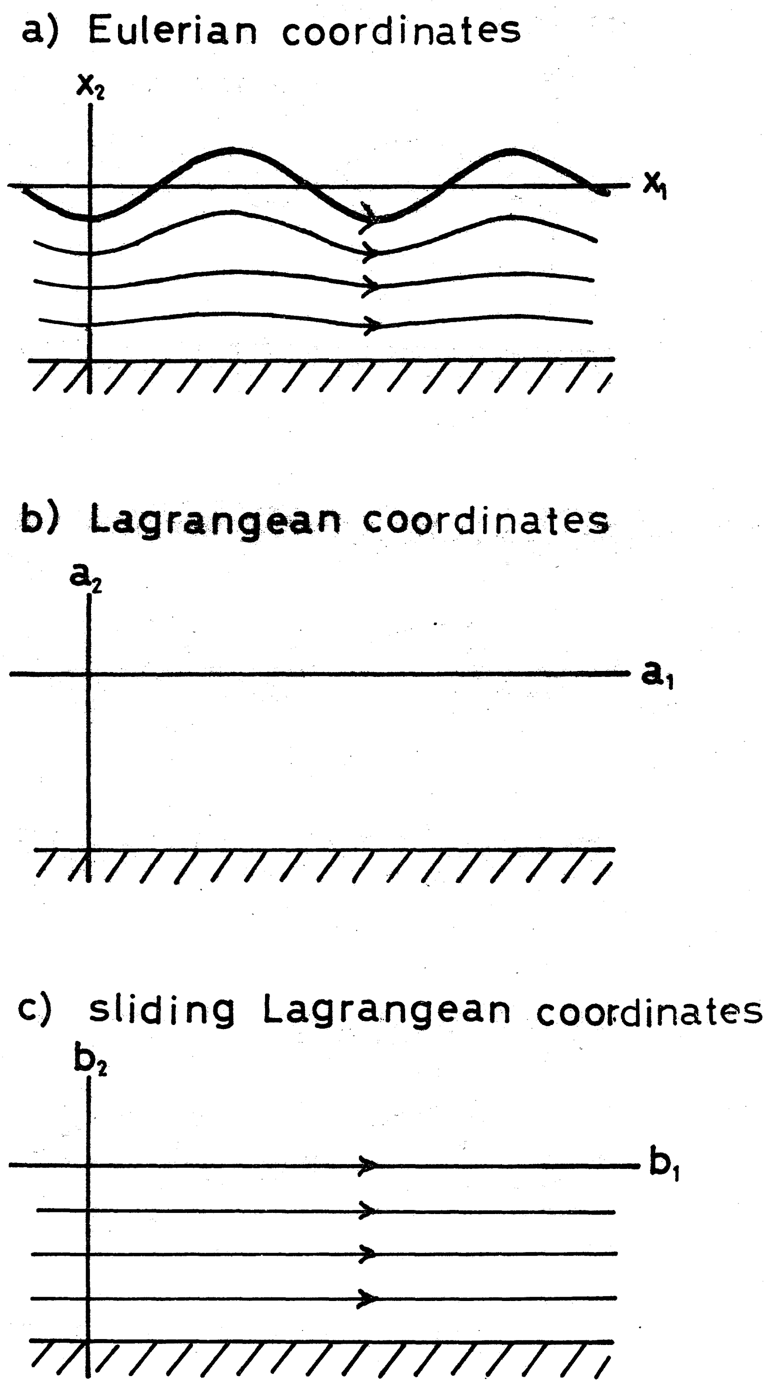

Fig. 2. Eulerian, Lagrangean, and silding Lagrangean coordinates.