数理解析研究所講究録
第 140 巻 1972 年 50-60

多値論理とオートマトン

野崎　昭弘（東大理学部）

昨年，同じ題で行った報告の線に沿って，その後の結果を報告したい。概念・記号の定義で，ここに示されていないものについては，前回の報告（数解研講究録，vol. 81, pp. 176-206）を参照して頂きたい。

我々の関心事は，いわゆる completeness problem である。しかし，合成の単位として，時間遅れゼロの論理素子の代りに，（多値）オートマトンを考えた点が特徴である。今回は，次の三つのテーマについて，得られた結果を述べたい。

1）$*$－maximal sets の特徴づけについて．── 目標はすべての $*$－maximal sets の分類である。今回は，いくつかの $*$－maximal sets の系列を示し，次のステップとして考えられる問題をいくつか提出する。

2）$\sim$－maximal sequences の特徴づけについて．── さしあたりの目標は，三値の場合の，すべての $\sim$－maximal sequences の決定である。今回は，定田によって得られた基本的な定理を紹介する．

3) より広いオートマトンのクラスに対する完全性の問題の考察. ——定義のむずかしさを指摘し，いくつかの定式化の間のギャップを明らかにしたい.

§1 $*$-maximal sets の特徴づけ

k 値論理関数族の全体を Ω とし，$F \subseteq \Omega$ とする。

$$F^{(1)} = F \circ \mathcal{P}, \quad F^{(n)} = F^{(n-1)} \circ F^{(1)}, \quad F^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} F^{(n)}$$

とおく（$\mathcal{P}$，（$\circ$）等については，[1] 参照）.

<u>Lemma</u> 1 (a) F maximal $\Rightarrow$ F $*$-maximal

(b) $K(a,b)$, $a \neq b$ は $*$-maximal

但し，$K(a,b) = \{ f \in \Omega ;\ f(a,\cdots,a) = f(b,\cdots,b) \}$, $k \geq 3$.

前回報告したように，$k=2$ ならば 8個 (Kudryavtsev), $k=3$ ならば 30個（野崎）の $*$-maximal sets が存在する．また，[1] 定理 3 (p.198) からわかるように，一般に

$$F \ *\text{-maximal}, \quad F \neq K(a,b)$$

$$\Rightarrow (\exists n \geq 1), (\exists M: \text{maximal set}): F^{(n)} \subseteq M \qquad (1)$$

である．そこで，条件(1)を手がかりに，$*$-maximal sets を求めてみる．まず，M が ‘D型’ の maximal set である場合を考察する。

<u>定 義 1</u> $(k) = \{0, 1, \cdots, k-1\}$, $S \subseteq (k)$ とする.

$$D_S = \{ f \in \Omega \; ; \; f(S, \cdots, S) \subseteq S \}$$

<u>Lemma</u> 2　$S \neq \phi$, (k) ならば, D_S は maximal である。

<u>定義</u> 2　$a_0, \cdots, a_{t-1} \in (k)$, $a_i \neq a_j$ for $i \neq j$ に対し,

$$C(a_0, \cdots, a_{t-1}) = \{ f \in \Omega \; ; \; f(a_i, \cdots, a_i) = a_{i \oplus 1} \}$$

$$\text{for} \quad 0 \leqq i \leqq t-1$$

ただし, $\oplus$ は modulo t の和である.

<u>定理</u> 1　(a)　$C(a_0, \cdots, a_{t-1})$ は $*$-maximal である。

特に, $t \geqq 1$ ならば, 'maximal でない $*$-maximal set' になっている.

(b)　F が, maximal でない $*$-maximal set で,

$$F^{(n)} \subseteq D_{\{a\}}$$

をみたすならば, 適当な

$$a_0 = a, \; a_1, \cdots, a_{t-1} \quad (t \geqq 1)$$

について

$$F = C(a_0, \cdots, a_{t-1})$$

となる。

<u>注意</u>　これで $S = \{a\}$ の場合が片付いた.

<u>定義</u> 3　$A_0, \cdots, A_{t-1} \subseteq (k)$, $A_i \cap A_j = \phi$ for $i \neq j$, かつどの A_i も2個以上の要素を含むとする.

$$C(A_0, \cdots, A_{t-1}) = \{ f \in \Omega \; ; \; f(A_i, \cdots, A_i) \subseteq A_{i \oplus 1} \}$$

for $0 \leq i \leq t-1$

<u>定理</u> 2　(a) $A_0, \cdots, A_{t-1}$ が定義3の条件をみたす集合列ならば，$C(A_0, \cdots, A_{t-1})$ は $*$-maximal である．

(b) F が maximal でない $*$-maximal set で，

$$F^{(n)} \subseteq D_S$$

をみたし，S が2個以上の相異る要素を含むならば，適当に

$$A_0 = S, \quad A_1, \cdots, A_{t-1}$$

をとると

$$F = C(A_0, \cdots, A_{t-1})$$

になる．

次に，'p型' maximal sets から派生する $*$-maximal sets を調べる．

$p : (k) \longrightarrow (k)$ を任意の全単射（すなわち (k) の permutation）とする．$p^d = \text{Identity}$ となる最小の整数（≥ 1）を，p の位数といい，$d(p)$ であらわすことにする．

<u>定義</u> 4　$C_{p,i} = \{ f \in \Omega \ ; \ f \circ p = p^i \circ f \}$

ただし $f \circ p(x_1, \cdots, x_n) = f(p(x_1), \cdots, p(x_n))$ とする．

<u>定理</u> 3　$C_{p,i}$ が $*$-maximal

$\Leftrightarrow$ $C_{p,1}$ が maximal で，$0 < i < d(p)$．

<u>注意</u>　$C_{p,1}$ が maximal $\Leftrightarrow$ p が素数次の順回置換（同次数）の直積としてあらわされる（Rosenberg，[2]）

次に，$\mathcal{R}$を(k)の中の順序関係で，最大・最小元を有するものとする．

$$F(\mathcal{R}) = \{ f \in \Omega \ ; \ x_i \mathcal{R} y_i \Rightarrow f((x_i)) \leq f((y_i)) \}$$

とおけば，$F(\mathcal{R})$はmaximalになる．

<u>Lemma</u> 3　$F(\mathcal{R}, \mathcal{R}^T)$は，$\mathcal{R}$がlatticeならば$*$-maximalになる．ただし，$\mathcal{R}^T = \{ (b, a) \ ; \ (a, b) \in \mathcal{R} \}$

<u>問</u>　$\mathcal{R}$がlatticeで<u>ない</u>場合，いつ$I \in F(\mathcal{R}, \mathcal{R}^T)$となるか．

一般の$\mathcal{R}$について，定理1，2に対応する定理はまだ得られていない．

§2　$\sim$-maximal sequencesの特徴づけ

[1]の結果によれば，$\sim$-maximal sequences (S_p)は次の2種類に分類できる。

(1)　$\exists a \neq b \ \forall p > 0 : \ S_p \subseteq K(a, b)$

(2)　$\exists M$: maximal set, $\exists p > 0, \forall q \geq 0 : S_{pq} \subseteq M$

条件(1)をみたすものについては，次の定理がある。

<u>定　理</u> 4　（疋田輝雄）　$\sigma = (S_p)$が$\sim$-closedで，(1)の条件が成りたつならば，Ω_1のあるsubsets S, Tが存在して，次の条件をみたす．

1)　S, TはΩ_1のproper subsemigroupである．

2)　$T = K(a_1, b_1) \cap \dots \cap K(a_n, b_n) \cap \Omega$と書ける。

3) $T \circ S \subseteq T$

4) $S_0 = F(S)$, $S_p = F(S, T)$ for $p \geq 1$.

注意 すべての $p \geq 1$ に対し, すべての $f \in S_p$ が定数関数になる場合を除けば, S, T を次のような2項関係におきかえてよい.

$S \subsetneqq (k^2)$, $S \neq \phi$, $S \ni (a, b)$, $T = \{(a, a) ; a \in (k)\}$

$k = 3$ の場合, 足田・野崎は次のような〜-maximal sequences を得た (vi, vii のみ野崎による)。以下, $A = S_0$, $B = S_p$ ($p \geq 1$) と略記する.

	A	B	
(i)	$D_a \cap D_b$	$K(a, b)$	..... $a \neq b$, 3通り
(ii)	$S(a, b)$	$Y(a, b)$	〃

ただし, a, b を入れかえる互換を τ とするとき,

$S(a,b) = \{f \in D_{\{a,b\}}$; $f \circ \tau = \tau \circ f$ for $(x_i) \in \{a,b\}^n\}$

$Y(a,b) = \{$ 〃 ; $f \circ \tau = f$ for $(x_i) \in \{a,b\}^n\}$

(iii) $D_{\{a,b\}}$ $\quad$ $Const(a, b)$

ただし

$Const(a, b) = \{f \in \Omega$; f は $\{a,b\}$ 上で定数関数$\}$

(iv) $\lambda(x) = \lambda \oplus 1$ ($\oplus$ は mod 3 の和) とおくとき,

$\{f : f \circ \lambda = \lambda \circ f\}$ $\quad$ $\{f : f \circ \lambda = f\}$

(v) D_a $\quad$ $\{0, 1, 2\}$

(vi)　$F\left(\left\{\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\c\end{bmatrix}\right\}\right)$　　$F\left(\left\{\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\c\end{bmatrix}\right\},\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right\}\right)$

(vii)　(ii)と同じτについて

$\{f : f\circ\tau=\tau\circ f\}$　　$\{f : f\circ\tau=f\}$

条件(1)をみたす$\sim$-maximal sequencesは，これらで尽きている。

(2)をみたすものについても，足田が一般の$k\geqq3$についての定理を与えた他，$k=3$の場合の具体的なlist upに成功しており，別に近く発表の予定である。

なお，$k=2$の場合のKudryavtsevの結果は，足田の結果から容易に導びかれる。

<u>問</u>　一般の$k\geqq3$について，$\sim$-maximal sequencesの分類を与えよ。

これは$*$-maximal setsの分類と平行して進められる筈である。我々は，足田の結果で一応の段階に到達したと考えているが，Rosembergの結果とあわせれば，これを解く道具立ても（少くとも大道具は）そろっているので，ただちに攻を続行してみても面白いであろう。

§3　オートマトンのクラスの完全性

完全性の定義にあたって，次の3点が問題になる。

a)　合成の単位となるオートマトンのクラス，および合成

の目標となるオートマトンのクラスをどのように限定するか。

b)‘合成’の定義(単位オートマトンの組みあわせかたの定義)

c)‘同等’の定義(合成オートマトンによって，目標とするオートマトンが‘表現’あるいは‘実現されている，ということの定義)

単位となるオートマトンのクラスを$\mathfrak{A}$，目標となるオートマトンのクラスを$\mathfrak{B}$としよう．すると，合成・同等の定義さえ与えられれば，$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{A}$ の完全性が次のように定義される.

$\mathfrak{F}$が($\mathfrak{B}$-) complete $\Leftrightarrow$ $^\forall$オートマトン$A \in \mathfrak{B}$
$^\exists$オートマトンA'：A'は$\mathfrak{F}$から合成可能で，A'はAと同等.

さて，a)，b)，c)の各点について，次のような選択肢がある。

a) 時間遅れのない論理素子 ..... *Post*, *Słupecki* 等
単位時間遅れをもつ論理素子 ..... *von Neuman*, 伊吹等
〃 の整数倍の遅れをもつ論理素子 ..... *Kudryavtsev*, 野崎
finitely definite automaton ..... *Loomis*
finite automaton ..... *Minsky*, 野崎

b) feedback loop を許すか否か.

'路程差'(伊吹)を許すか否か.

c) 入力の間隔をあけることを許すか.

最初に dummy input を食わすことを許すか.

[例] $\mathcal{A}$として単位時間遅れをもつ論理素子のクラスをとり, $\mathcal{B}$として一般の automaton のクラスを選んだ場合, b), c)の選択の次のような組み合せが考えられる.

	FBL	路程差	dummy input	入力間隔
1)	×	×	×	単位時間
2)	×	○	×	〃
3)	×	○	○	〃
4)	×	○	○	一定時間
5)	○	○	○	〃

5)は Minsky によって考察された. また, $\mathcal{B}=\mathcal{A}$ (論理素子のクラス)の場合, 1)は Kudryavtsev によって, 3)は伊吹によって考察された.

$\mathcal{A}=\mathcal{B}=$'単位時間の整数倍の遅れをもつ論理素子のクラス'の場合に, 1)〜5)それぞれについて定義される完全性の概念を, 次のように呼んで区別することにしよう (cf. [3]).

1) ~-complete

2) strongly (k)-complete

3) (k)-complete

4) weakly (k)-complete

5) (k)-universal

すると，次の定理が成りたつ（[3]）

<u>定理</u> 5

1) $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 2) $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 3) $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 4) $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 5)

<u>注意</u> 2) $\not\Leftarrow$ 3)は，$k \geqq 3$ の場合のみ証明された．

4) $\not\Leftarrow$ 5)は，一般のオートマトンに関して証明された．

<u>問</u> $k=2$ の場合，2) $\not\Leftarrow$ 3)が成りたつか．

<u>問</u> $\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$ を上のように限定したとき，4) $\not\Leftarrow$ 5)が成りたつか．

合成の目標を任意の有限オートマトンにおく場合には，‘同等’の代りに‘同期的に表現可能’の概念が有用である．([3]をみよ．)

<u>定理</u> 6 $\mathcal{F}$ を単位時間の整数倍の遅れをもつ論理素子のある集合とする．

任意のオートマトンAを，同期的に表現可能なオートマトンA'が，$\mathcal{F}$ から合成可能

$\Longleftrightarrow$ 任意の論理関数 f を計算するオートマトン A_f が，$\mathcal{F}$ から合成可能．

この定理によって，オートマトンの合成の問題が，論理関

数の合成の問題に帰着される.

参 考 文 献

[1] 野崎昭弘「多値論理とオートマトン」数解研講究録 vol. 81, pp 176-206.

[2] I. Rosenberg, Structure de la classe des fonctions définies dans un ensemble fini quelconque, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Tom 260 (1965)

[3] A. Nozaki, Functional Studies of Automata (I), (II) Scientific Papers of College of General Educations, University of Tokyo, vol. 20, pp. 21-36, pp. 109-121.