数理解析研究所講究録
第 141 巻 1972 年 47-61

中野の定理の拡張について

九大理　風間英明

本講演の目的は，中野茂男[6]によるコホモロジーの消滅定理の複素解析空間への拡張について，H. Grauert und O. Riemenschneider[3]にしたがって紹介することである。

§1. 複素空間に対する Canonical line bundle と quasi positive な vector bundle について

複素空間 X と X 上の解析的連接層 S が与えられたとき，X の部分集合

$$\mathcal{R}(X:S)=\left\{x\in X\ ;\ x\text{ は regular point 且つ } S\text{ は } x\text{ で local free sheaf}\right\}$$

を考える。そうすると $X-\mathcal{R}(X:S)$ は X の低い次元をもつ解析的集合となる。この点については，例えば Rossi[7] proposition 3.1.。また $S|\mathcal{R}(X:S)$ は複素多様体 $\mathcal{R}(X:S)$ 上の解析的 vector bundle を表わすものと考えられる。以下

においては，vector bundle はその hol. cross sections の germs のなす層と同一視することにする。このとき次に定義を与える。

<u>定義</u>. 複素空間 X 上の解析的連接層 $\mathcal{S}$ が quasi-positive であるとは $R(X:\mathcal{S})$ の開且つ密な部分集合 R' が存在して，R' 上の解析的 vector bundle $\mathcal{S}|R'$ が中野の意味で positive([6]) となることである。

このとき，中野の消滅定理において，quasi-positive なる条件は本質的でないから，次の結果が成り立つ。

<u>定理 1</u>.（中野茂男[6]）. コンパクト Kähler 多様体 X 上の quasi-positive な vector bundle V に対して，

$$H^{\nu}(X,\ V\otimes K(X)) = 0,\quad \nu \geq 1$$

が成り立つ，但し $K(X)$ は X の canonical line bundle を示す。

証明は中野茂男[6]の Theorem 1 の証明において (n, q) 型の X 上の V に値をもつ調和形式 φ に対して，

$$\int_{R'} \chi\wedge\Lambda\varphi\wedge\bar{*}\varphi = \int_{X} \chi\wedge\Lambda\varphi\wedge\bar{*}\varphi$$

に注意すれば，残りの議論は全くそのまま成り立つので省略する。

この定理1を複素空間に拡張する場合に問題となるのは次の2点である。

(1). 複素空間に対して，canonical line bundle を定義しなければならない。

(2). コンパクト Kähler 多様体に対応する複素空間を考えねばならない。

この2点を Moišezon 空間の modification を用いて解決する。

<u>定義</u>. 次元 n の既約且つコンパクトな複素空間に対し，その上に n 個の代数的独立な有理型函数が存在するとき，X を Moišezon 空間と云う。

<u>注意</u>. Moišezon[5] によれば Moišezon 空間は代数的多様体による desingularisation をもつ。すなわち代数的多様体 $\hat{X}$ が与えられた Moišezon 空間 X に対して存在し $\pi : \hat{X} \longrightarrow X$ が X の desingularisation を与える。

次の事実から，Moišezon 空間に対して，canonical な層を定義することが出来る。

<u>命題</u>. X を Moišezon 空間，X の代数的多様体 $\hat{X}$ による desingularisation を $\pi : \hat{X} \longrightarrow X$ とする。

このとき $\hat{X}$ は特異点をもたないから canonical line bundle $K(\hat{X})$ をもつが，π による $K(\hat{X})$ の0次の direct image $K(X)=\pi_{(0)}(K(\hat{X}))$ を考えると $K(X)$ は torsion-free な解析的連接層であり，しかも X の de-singularisation $\hat{X}$ のとり方によらない。

証明．$(\hat{X}_1, \pi_1)$, $(\hat{X}_2, \pi_2)$ を X の二つの desingularisations とする。このとき fibre 積 $\hat{X}_1 \times_X \hat{X}_2$ の reduction $\hat{Y}$ から $\hat{X}_1$, $\hat{X}_2$ への自然な写像を

$$p_1 : \hat{Y} \longrightarrow \hat{X}_1 \quad , \quad p_2 : \hat{Y} \longrightarrow \hat{X}_2$$

とする。このとき p_1, p_2 は $\hat{X}_1$, $\hat{X}_2$ の proper modification を与える。そこで $(\hat{Z}, \rho)$ を $\hat{Y}$ の desingularisation とすると，次の可換図を得る。

$$\begin{tikzcd} & \hat{X}_1 \arrow[dr, "\pi_1"] & \\ \hat{Z} \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & X \\ & \hat{X}_2 \arrow[ur, "\pi_2"'] & \end{tikzcd} \quad , \varphi_1 = p_1 \circ \rho \ , \ \varphi_2 = p_2 \circ \rho$$

我々の証明すべき事は $\pi_{1(0)}(K(\hat{X}_1)) = \pi_{2(0)}(K(\hat{X}_2))$

だが，そのためには

$$K(\hat{X}_i) = \varphi_{i(0)}(K(\hat{Z})) \qquad i=1,2$$

が示されれば十分である。

proper modification $\varphi_i : \hat{Z} \longrightarrow \hat{X}_i$ の退化集合を $\hat{E}$ とすると $E = \varphi_i(\hat{E})$ は $\hat{X}_i$ における余次元2以上の解析的集合となる。一方 $\hat{X}_i$ の任意の開集合 V に対して，

$H^0(V, K(\hat{X}_i))$ は V 上の正則な n-形式全体と一致し，これは $\varphi_i^{-1}(V)$ での正則な n-形式とみなすことが出来る．したがって，

$$H^0(V, K(\hat{X}_i)) \subset H^0(\varphi_i^{-1}(V), K(\hat{Z})) \qquad i=1,2$$

を得る。一方 $\alpha \in H^0(\varphi_i^{-1}(V), K(\hat{Z}))$ とすると，$\varphi_i \mid \varphi_i^{-1}(V) - \hat{E}$ は両正則写像だから α は $V - E$ での正則な n-形式とみなされ，Riemann の接続定理より α は V での正則な n-形式とみなされる。したがって

$$H^0(V, K(\hat{X}_i)) = H^0(\varphi_i^{-1}(V), K(\hat{Z})) \qquad i=1,2$$

つまり $K(\hat{X}_i) = \varphi_{i(0)}(K(\hat{Z}))$ $i=1,2$ が示された。

q. e. d.

定義．Moisezon 空間 X に対し，上の命題により一意的に定まる，torsion-free な解析的連接層 $K(X)$ を X の canonical な層と云う。

そこで Moisezon 空間に対して，今定義した canonical な層と quasi-positive な層に対して Grauert の direct image sheaf の理論を用いて，定理 1 を拡張するのだが そのために次の定理が重要な役割を果す。

定理 2．X を algebraic variety（特異点をもつ場合に区別して，こう書くことにする。），S を quasi-positive，torsion-free な，X 上の解析的連接層とする。さらに，

X の desingularisation $\pi: \hat{X} \longrightarrow X$ が，$\mathcal{S}$ の π による inverse image $\mathcal{S} \circ \pi \underset{\text{def.}}{=} \pi^*\mathcal{S}/T(\pi^*\mathcal{S})$ を local free な層にするようなものであるときには，($T(\pi^*\mathcal{S})$ は $\pi^*\mathcal{S}$ の torsion sheaf)

$$\pi_{(q)}(\hat{\mathcal{S}} \otimes K(\hat{X})) = 0 \qquad q \geqq 1 \ (\text{但し } \hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \circ \pi \text{ とする})$$

となる。但し，$\pi_{(q)}$ は q 次の direct image を示す。

注意．実は，任意の与えられた $\mathcal{S}$ に対し，$\mathcal{S} \circ \pi$ が local free になるような，desingularisation $\pi: \hat{X} \longrightarrow X$ が存在することは Rossi [7] により保証されているのである。

証明．帰納法による。$q=1$ のとき命題が正しいことを先ず示す。$\mathfrak{U} = \{U_\rho\}$，$\mathfrak{V} = \{V_\sigma\}$ を，それぞれ，X，$\hat{X}$ の Stein coverings とする。$\mathfrak{U}$ から作られる $\hat{X}$ の covering $\hat{\mathfrak{U}} = \{\hat{U}_\rho = \pi^{-1}(U_\rho)\}$ を考える。covering $\hat{\mathfrak{U}}$，$\mathfrak{V}$ から次のような double complex を作る。

$$C^{r,s} = \prod_{\substack{\rho_0 \cdots \rho_r \\ \sigma_0 \cdots \sigma_s}} \Gamma(\hat{U}_{\rho_0} \cap \cdots \cap \hat{U}_{\rho_r} \cap V_{\sigma_0} \cap \cdots \cap V_{\sigma_s},\ \hat{\mathcal{S}} \otimes \hat{K})$$

但し，$\hat{K} = K(\hat{X})$ とする。そこで

$$\delta': C^{r,s} \longrightarrow C^{r+1,s} \qquad \delta'': C^{r,s} \longrightarrow C^{r,s+1}$$

を，

$$\delta'(f)_{\rho_0 \cdots \rho_{r+1} \sigma_0 \cdots \sigma_s} = \sum_{k=0}^{r+1} (-1)^k f_{\rho_0 \cdots \hat{\rho}_k \cdots \rho_{r+1} \sigma_0 \cdots \sigma_s}$$

$$\delta''(f)_{\rho_0 \cdots \rho_r \sigma_0 \cdots \sigma_{s+1}} = \sum_{k=0}^{s+1} (-1)^k f_{\rho_0 \cdots \rho_r \sigma_0 \cdots \hat{\sigma}_k \cdots \sigma_{s+1}}$$

で定義する。明らかに

$$\{C^{r,s}, \delta', \delta''\}$$

は double complex を作る。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
C^{0,0} & \xrightarrow{\delta'} & C^{1,0} & \xrightarrow{\delta'} & C^{2,0} & \xrightarrow{\delta'} & \cdots\cdots & \longrightarrow & C^{\nu,0} & \xrightarrow{\delta'} & C^{\nu+1,0} \longrightarrow \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle \delta''} & & \downarrow{\scriptstyle \delta''} & & \downarrow{\scriptstyle \delta''} & & & & \downarrow{\scriptstyle \delta''} & & \downarrow{\scriptstyle \delta''} \\
C^{0,1} & \xrightarrow{\delta'} & C^{1,1} & \xrightarrow{\delta'} & C^{2,1} & \longrightarrow & \cdots\cdots & \longrightarrow & C^{\nu,1} & \xrightarrow{\delta'} & C^{\nu+1,1} \longrightarrow \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle \delta''} & & \downarrow{\scriptstyle \delta''} & & \downarrow{\scriptstyle \delta''} & & & & \downarrow{\scriptstyle \delta''} & & \downarrow{\scriptstyle \delta''} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
C^{0,\nu-1} & \xrightarrow{\delta'} & C^{1,\nu-1} & \xrightarrow{\delta'} & C^{2,\nu-1} & \longrightarrow & \cdots\cdots & \longrightarrow & C^{\nu,\nu-1} & \xrightarrow{\delta'} & C^{\nu+1,\nu-1} \longrightarrow \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle \delta''} & & \downarrow{\scriptstyle \delta''} & & \downarrow{\scriptstyle \delta''} & & & & & & \\
C^{0,\nu} & \xrightarrow{\delta'} & C^{1,\nu} & \xrightarrow{\delta'} & C^{2,\nu} & \xrightarrow{\delta'} & \cdots\cdots & & & &
\end{array}$$

一方 π は proper だから $\hat{U}_\rho = \pi^{-1}(U_\rho)$ は正則凸したがって $\hat{\mathfrak{U}} \cap V_{\sigma_0 \cdots \sigma_s} = \{\hat{U}_\rho \cap V_{\sigma_0 \cdots \sigma_s}\}_\rho$ は $V_{\sigma_0 \cdots \sigma_s}$ の Stein covering である。よって $V_{\sigma_0 \cdots \sigma_s}$ の Stein性より

$$H^\nu(V_{\sigma_0 \cdots \sigma_s} \cap \hat{\mathfrak{U}},\ \hat{S} \otimes \hat{K}) = 0 \qquad \nu \geq 1$$

つまり，上の可換図で横列は exact になる。

$$H^{2,0} = Z^{2,0}/B^{2,0}, \quad Z^{2,0} = \{ f \in C^{2,0} :\ \delta'' f = 0,\ \delta' f = 0 \}$$

$$B^{2,0} = \{ \delta' f :\ f \in C^{1,0}\ \&\ \delta'' f = 0 \}$$

とすると，$Z^{2,0} \cong Z^2(\hat{\mathfrak{U}}, \hat{S} \otimes \hat{K})$，$B^{2,0} \cong B^2(\hat{\mathfrak{U}}, \hat{S} \otimes \hat{K})$

となるから

$$H^{2,0} = H^2(\hat{\mathfrak{U}}, \hat{S} \otimes \hat{K})$$

となる。仮定より，X は algebraic variety だから X 上には quasi-positive line bundle F が存在する。そこで

$\hat{F} = \pi^*F / T(\pi^*F)$，$T(\pi^*F)$ は π^*F の torsion 元のなす π^*F の部分層とする，を考えると

$$\hat{S}\otimes\hat{F}^{l} = \widehat{S\otimes F^{l}}$$

，l は tensor power を示す。

が成り立つ，さらに F が local free であることから

$$\pi_{(q)}(\widehat{S\otimes F^{l}\otimes K}) = \pi_{(q)}(\hat{S}\otimes\hat{K})\otimes F^{l} \qquad q=0,1,2,\cdots$$

が成り立つ。したがって，$\pi_{(1)}(\hat{S}\otimes\hat{K})=0$ を示すことと，或る l に対して，$\pi_{(1)}(\widehat{S\otimes F^{l}}\otimes\hat{K})=0$ を示すこととは同値である。よって，今後，l を十分大きいものとして，S を $S\otimes F^{l}$ と見立てて証明すればよい。一方 Grauert [2] によれば，十分大きな l_0 が存在し，任意の $l \geqq l_0$ に対して，

$$H^{\nu+1}(X, \pi_{(0)}(\hat{S}\otimes\hat{K})\otimes F^{l}) = 0, \quad \nu\geqq 0$$

となる。よって，我々の場合

$$H^2(X, \pi_{(0)}(\hat{S}\otimes\hat{K})) = 0$$

となるものとしてよい。一方

$$\begin{aligned} H^2(X, \pi_{(0)}(\hat{S}\otimes\hat{K})) &= H^2(\mathfrak{W}, \pi_{(0)}(\hat{S}\otimes\hat{K})) \\ &= H^2(\hat{\mathfrak{W}}, \hat{S}\otimes\hat{K}) \\ &= H^{2,0} \end{aligned}$$

だから，$H^{2,0}=0$，としてよいわけである。今，我々は，$\pi_{(1)}(\hat{S}\otimes\hat{K})\neq 0$，として矛盾を導びく。このとき，必要ならば，$l$ を十分大きく取っておき S を $S\otimes F^{l}$ と見なすことにより，$\Gamma(X, \pi_{(1)}(\hat{S}\otimes\hat{K}))$ の non-zero 元

$$a \in \Gamma(X,\ \pi_{(1)}(\hat{S} \otimes \hat{K}))$$

が存在するものとしてよい。このaから $H^1(\hat{X},\ \hat{S}\otimes\hat{K})$ の non-zero cohomology class を作る。

$$\Gamma(U_\rho,\ \pi_{(1)}(\hat{S}\otimes\hat{K})) = H^1(\hat{U}_\rho,\ \hat{S}\otimes\hat{K})$$

より，$\xi_\rho \in Z^1(\hat{U}_\rho \cap \mathfrak{U},\ \hat{S}\otimes\hat{K})$ が存在して，

$$a \mid U_\rho = [\xi_\rho] : \xi_\rho \text{の属する } H^1(\hat{U}_\rho, \hat{S}\otimes\hat{K}) \text{における class}$$

となる。定義より，$\{\xi_\rho\}_\rho \in C^{0,1} \cap \{\delta''\xi_\rho = 0\}$。

そこで，$\zeta \equiv \delta'\{\xi_\rho\} \in C^{1,1}$ とすると，

$$[\xi_{\rho_0}] = [\xi_{\rho_1}] \text{ in } H^1(\hat{U}_{\rho_0} \cap \hat{U}_{\rho_1},\ \hat{S}\otimes\hat{K})$$

より，$\alpha_{\rho_0\rho_1} \in C^0(\hat{U}_{\rho_0} \cap \hat{U}_{\rho_1} \cap \mathfrak{U},\ \hat{S}\otimes\hat{K})$ が存在して

$$\zeta_{\rho_0\rho_1} = \xi_{\rho_1} - \xi_{\rho_0} = \delta''(\alpha_{\rho_0\rho_1})$$

を満足する。よって $\alpha = \{\alpha_{\rho_0\rho_1}\} \in C^{1,0}$ となり，$\zeta = \delta''\alpha$ が成り立つ。又，$\delta'(\delta'\alpha) = 0$, $\delta''(\delta'\alpha) = 0$ となるから，$\delta'\alpha \in Z^{2,0}$ である。$H^{2,0} = 0$ であるから，$\delta'\alpha \in B^{2,0}$ を得る。すなわち，$\eta \in C^{1,0}$ が存在し，$\delta''\eta = 0$ 且つ $\delta'\alpha = \delta'\eta$ が成り立つ。よって，$\delta'(\alpha - \eta) = 0$ だから double complex の横列の exactness より，$\beta \in C^{0,0}$ が存在し，$\alpha - \eta = \delta'\beta$ をみたす。そこで，$\xi_\rho^* \equiv \xi_\rho - \delta''\beta_\rho$，とおくと

$$\begin{aligned}\delta'\{\xi_\rho^*\} &= \delta'\{\xi_\rho\} - \delta''\delta'\{\beta_\rho\} \\ &= \zeta - \delta''(\alpha - \eta)\end{aligned}$$

$$= \zeta - \delta''\alpha$$
$$= 0$$

となる。したがって，$C^1(\mathfrak{U}, \hat{\mathcal{S}}\otimes\hat{K}) = C^{0,1} \cap \ker \delta'$ より，$\xi^* \in C^1(\mathfrak{U}, \hat{\mathcal{S}}\otimes\hat{K})$ となる。又 $\delta''\xi^*_\rho = \delta''(\xi_\rho - \delta''\beta_\rho) = \delta''\xi_\rho = 0$ だから，$\xi^* \in Z^1(\mathfrak{U}, \hat{\mathcal{S}}\otimes\hat{K})$ となる。且つ，

$a|U_\rho = [\xi_\rho] = [\xi^*_\rho]$，又 $a \neq 0$，より，

$a = [\xi^*] \in H^1(\mathfrak{U}, \hat{\mathcal{S}}\otimes\hat{K}) = H^1(\hat{X}, \hat{\mathcal{S}}\otimes\hat{K}) = \Gamma(X, \pi_{(1)}(\hat{\mathcal{S}}\otimes\hat{K}))$

故に，$H^1(\hat{X}, \hat{\mathcal{S}}\otimes\hat{K}) \neq 0$，となる。これは，$\hat{X}$ が代数的多様体であって，$\hat{\mathcal{S}}$ が quasi-positive であることと定理1に照らし合わせると，矛盾が得られる。よって，$\pi_{(1)}(\hat{\mathcal{S}}\otimes\hat{K}) = 0$ を得る。

証明の後半は，$\nu \leq k$ のとき $\pi_{(\nu)}(\hat{\mathcal{S}}\otimes\hat{K}) = 0$ と仮定して，$\pi_{(k+1)}(\hat{\mathcal{S}}\otimes\hat{K}) = 0$ を導びくのだが，この部分は，Grauert and Riemenschneider [3] に証明が詳しくされている。しかも，前半の証明において，double complex の cohomology $H^{2,\nu-1} \cong H^{\nu+1,0}$ に注意すれば，殆んど同様して証明されるので，ここでは述べないことにする。

q.e.d.

この定理2から我々の所要の結果を導びくのだが，それには，次の direct image sheaf に関する，よく知られた結果

を用いる。この定理を証明することは本論とは少しはなれるので証明は省略する。

<u>定理3</u>. X, Yを複素空間, $\pi : X \longrightarrow Y$を正則写像で, $\mathcal{F}$をX上の解析的層とする。このとき次の(1),(2)が成り立つ。

(1), πがproperで$\mathcal{F}$が連接ならば$\pi_{(q)}(\mathcal{F})$もY上の解析的連接層をなす。

(2) もし $\pi_{(q)}(\mathcal{F}) = 0 \qquad q \geq 1$, ならば,

$$H^{\nu}(X, \mathcal{F}) \cong H^{\nu}(Y, \pi_{(0)}(\mathcal{F})) \qquad \nu \geq 1$$

が成り立つ。

この講演の目的であった次の定理が成り立つ。

<u>定理4</u>. Xを*Moisezon*空間, $\mathcal{S}$をtorsion-free, 且つquasi-positiveな, X上の解析的連接層とする。このとき

$H^{\nu}(X, \pi_{(0)}(\hat{\mathcal{S}} \otimes \hat{K}(\hat{X}))) = 0 \qquad \nu \geq 1$, $\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \circ \pi$

が成り立つ。特に$\mathcal{S}$が*local free*のときは,

$\pi_{(0)}(\hat{\mathcal{S}} \otimes \hat{K}(\hat{X})) = \mathcal{S} \otimes K(X)$, $K(X)$はXのcanonicalな層, となるのでこれは中野の定理1の拡張になっていることがわかる。

<u>証明</u>、Rossi [7] により存在が保証された, *desingularization* $\pi : \hat{X} \longrightarrow X$, をとる。すなわち, $\hat{X}$は代数的多様体であって, $\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \circ \pi = \pi^*\mathcal{S} / T(\pi^*\mathcal{S})$が*local free*とな

るような desingularisation $\pi:\hat{X}\longrightarrow X$ を考える。このとき，$\pi_{(q)}(\hat{S}\otimes K(\hat{X}))=0$ ， $q\geq 1$ を示す。仮定より X は Moišezon 空間だから，Artin[1] の結果より，X の任意の点 x_0 に対して，algebraic variety Y と，Y から X への正則写像 $\varphi:Y\longrightarrow X$，さらに Y の解析的集合 E が存在し，φ は $Y-E$ では局所正則且つ $x_0\in\varphi(Y-E)$ となる。そこで $\tilde{Y}=Y\times_X\hat{X}$ を Y と $\hat{X}$ の fibre 積としておく，そうすると $\tilde{Y}$ はやはり algebraic variety である。したがって，Hironaka[4] の結果より，代数的多様体 $\tilde{Y}$ による desingularisation $\rho:\hat{Y}\longrightarrow\tilde{Y}$ がある。そこで，この ρ と $\tilde{Y}$ から Y, $\hat{X}$ への自然な写像との合成をそれぞれ，σ, ψ と書くと，次の commutative diagram を得る。

$$\begin{tikzcd}
\hat{Y} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\sigma"'] & \hat{X} \arrow[d, "\pi"] \\
Y \arrow[r, "\varphi"] & X
\end{tikzcd}$$

π が proper であることより，σ も又 proper となる。
$S\circ(\pi\circ\psi)=S\circ(\sigma\circ\varphi)=(S\circ\pi)\circ\psi=(S\circ\varphi)\circ\sigma$ は $\hat{Y}$ 上の quasi-positive, local free な層である。したがって，定理2より

$$\sigma_{(\nu)}(S\circ(\sigma\circ\varphi)\otimes K(\hat{Y}))=0 \qquad \nu\geq 1$$

を得る。ψ は $\hat{E}=\sigma^{-1}(E)$ を除いて，局所両正則であり，

$x_0 \in \pi(\varphi(\hat{Y}-\hat{E}))$ となる。又 φ は $Y-E$ で局所両正則且つ $x_0 \in \varphi(Y-E)$ となるように取ったのだから、

$$\sigma_{(\nu)}(\mathcal{S}\circ(\sigma\circ\varphi)\otimes K(\hat{Y}))=0 \qquad \nu\geq 1$$

より、x_0 の或る近傍で

$$\pi_{(\nu)}(\hat{\mathcal{S}}\otimes K(\hat{X}))=0 \quad , \quad \nu\geq 1$$

が得られる。この議論は X の任意の点 x_0 で出来るのだから、

$$\pi_{(\nu)}(\hat{\mathcal{S}}\otimes K(\hat{X}))=0 \quad \text{on } X \quad , \nu\geq 1$$

を得る。したがって定理3(2)より、$\nu\geq 1$ のとき

$$H^\nu(X,\pi_{(0)}(\mathcal{S}\circ\pi\otimes K(\hat{X})))\cong H^\nu(\hat{X},\ \mathcal{S}\circ\pi\otimes K(\hat{X}))$$

となる。$\mathcal{S}\circ\pi$ は quasi-positive であり、$\hat{X}$ は代数的多様体であるから、中野の定理1より、

$$H^\nu(\hat{X},\ \mathcal{S}\circ\pi\otimes K(\hat{X}))=0 \qquad \nu\geq 1$$

を得て証明は終る。 q. e. d.

§2. その他

§1 で singularity がある場合に、desingularisation を用いて、canonical な層を作ることを述べたが、次の Grothendieck による canonical な層も考えることが出来る。しかし、この場合には中野の定理1の拡張が成り立たないことが、Grauert and Riemenschneider [3] により確められている。すなわち、次のような事実があ

る。 今Xをn次元の複素空間とする。このときXのstructure sheafを$\mathcal{O}$とする。Xの開集合Uが$\mathbb{C}^m$の開集合Dの解析的集合上に両正則に写されたとき，KをDのcanonicalな層とするとき，$\mathcal{E}xt^i_{{}_D\mathcal{O}}(\mathcal{O}_U, K) = 0 \quad i = 0, 1, 2, \cdots, d-1$

但し，${}_D\mathcal{O}$はDの正則函数芽の層，$d = m - n$，が成り立つ。そこで，

$$K^*(U) \equiv \mathcal{E}xt^d_{{}_D\mathcal{O}}(\mathcal{O}_U, K) \,|\, U$$

とおき，$K^*(U)$を張り合わせてX上の層K^*を作る。このK^*を*Grothendieck*の*canonical*な層と云う。明らかに，もしXがnon-singularならば$K^* = K(X)$である。但し$K(X)$は多様体Xの普通の意味での*canonical line bundle*を示すものとする。実際，K^*の定義より，Xがnon-singularならば，

$$K^* = \mathcal{E}xt^0_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}, K) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}, K) = K$$

となるからである。

Grauert and Riemenschneider [3] はK^*に関しては小平の定理の拡張，定理4が成り立たない例を作っている。

すなわち，*normal*な3次の*Moisezon*空間Xで，

$H^1(X, K^* \otimes F) \neq 0$．$F$は$X$上の*positive*なline bundleとなるものが存在する。

引用文献

[1] Artin, M. : Algebraization of formal moduli : II. Existence of modifications. Ann. Math. 91, 88-135(1970).

[2] Grauert, H. : Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. Math. Ann. 146, 331-368(1962).

[3] ——— und Riemenschneider, O. : Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Raümen. Invent. Math. 11, 263-292(1970).

[4] Hironaka, H. : Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero : I, II. Ann. Math. 79, 109-326(1964).

[5] Moisezon, B. G. : Resolution theorems for compact complex spaces with a sufficiently large field of meromorphic functions. Math. USSR-Izvestija 1. 1331-1356(1967).

[6] Nakano, S. : On complex analytic vector bundles. J. Math. Soc. Japan 7, 1-12(1955).

[7] Rossi, H. : Picard variety of an isolated singular point. Rice Univ. Studies 54, 63-73(1968).