数理解析研究所講究録
第141巻 1972年 95-107

強擬凸領域における正則関数の積分表示

富山大. 文理. 鈴木正昭

序.

最近 Ramirez [13], Henkin [5] らは $\mathbb{C}^n$ 内の有界な強擬凸領域で正則な関数に対する正則核をもつ積分表示を具体的に与えている。($\mathbb{C}^n$ 内の有界領域における積分表示で正則な核をもつものが存在することはそれ以前に Bungart [1], Gleason [2] らが示している。)

一方 Hörmander は 1964 年 $\bar{\partial}$-問題を Stein 多様体内の強擬凸部分領域において肯定的にといた。([7], [8]). つまりそこで $\bar{\partial}$-closed な係数を L^2 にもつ (0, 1)-form α に対して $\bar{\partial}u=\alpha$ ($\bar{\partial}$ は超関数の意味で) となるような L^2-関数 u が存在することを示した。そのさい解 u は L^2-estimate $\|u\|_{L^2} \leq K\|\alpha\|_{L^2}$ をみたす。(K は α に無関係だが領域に depend する定数)

Grauert-Lieb [3] は $\mathbb{C}^n$ 内の有界強擬凸領域 G での $\bar{\partial}u=\alpha$ の解 u を Ramirez の核をもちいて積分であらわし,

それから解の sup-norm estimate をえた。Kerzmann [9] は Ramirez, Grauert-Lieb らの方法を locally に用いることにより $\bar\partial$-問題の解の estimate に対してよりくわしく論じた。そして次の結果をえた。「Stein 多様体上の relativelly compact な強擬凸領域 G において $\alpha \in L^p(G)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ なら $\bar\partial u = \alpha$ の解 u も $L^p(G)$ にぞくし、かつ

$$\|u\|_{L^p(G)} \leq K \|\alpha\|_{L^p(G)}$$

をみたす.」

この小論では以上のことについてのべると共にそれらの応用について少しふれる。

§1. 強擬凸領域における正則関数の積分表示.

以下 G は $\mathbb{C}^n$ 内の有界強擬凸領域でその境界 ∂G は C^{k+2} 級 $(k \geq 2)$ とする. つまり G は ∂G の近傍 U とそこでの強多重劣調和関数 ϕ により $G \cap U = \{x \in U;\ \phi(x) < 0\}$ とあらわされる. (ただし $d\phi \neq 0$ on ∂G).

G で正則な関数全体のなす ring を $H(G)$, $H(G)$ の元で かつ $\bar G$ で連続なものの全体を $A(G)$ とかく.

$A(G)$ の関数に対する積分表示の核を Ramirez の方法でつくろう。まず出発点となるのは次の補題である (Koppelmann [10])。

Dは$\mathbb{C}^n$内の有界領域とし、その境界∂Dは有限個のC^1-部分から
なる。$\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n$内で$\partial D\times D$の近傍Wをとる。$g_j(x,y)$はW上の$C^2$級
関数$(j=1,\cdots,n)$であるとき $g(x,y)\equiv\sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)g_j(x,y)$ と
おく。$\partial D\times D$上で $g(x,y)\neq 0$ のとき次のような$\partial D\times D$上
の微分形式をつくる。

$$(1)\qquad \Omega_y^*(x)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}g_j\bigwedge_{k\neq j}\bar{\partial}_x g_k\right)\wedge\bigwedge_{l=1}^{n}dx_l}{g(x,y)^n}$$

$x\in\partial D,\quad y\in D$

補題1.1　a)　$d_x\Omega_y(x)=\bar{\partial}_x\Omega_y(x)=0$

b)　for $\forall f\in A(D)$

$$f(y)=\int_{\partial D}f(x)\Omega_y(x)\qquad y\in D.$$

まず前にのべた領域Gに対して $g(x,y)\neq 0$ on $\partial G\times G$,
$g(x,x)=0$ for $x\in\partial G$ なる関数をつくろう。

補題1.2　∂Gの近傍Uと$\bar{G}$の近傍Vがあって、$U\times V$上で
定義され$y\in V$にかんして正則 $x\in U$にかんしてC^k級の
関数$g(x,y)$で次の条件をみたすものがある。

a)　$\mathrm{Re}\,g(x,y)>0$　for $(x,y)\in\partial G\times\bar{G}-D$

b)　$g(x,y)=0$　for $(x,y)\in(U\times V)\cap D$

ただしDは$U\times V$の対角集合.

[証]　概略をのべる(くわしくは[13]をみてください。)　Gは一

様にLevi全擬凸だから，$x \in \partial G$ に対し y の2次多項式

$$P_x(y) = 2\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x) - \sum_{i,j=1}^{n}(x_i - y_i)(x_j - y_j)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

が $(\partial G \times \partial G) \cap D$ の近傍で条件をみたすことはすぐわかる。そしてこれを $\{x\} \times \overline{G}$ の近傍へ拡張するのだが，そのときFréchet spaceに値をもつCousin I-分布を解く必要がおこる。そうして ∂G を有限個の近傍でcoverし各近傍 $W \times \overline{G}$ でえられた $g_W(x, y)$ を単位の分解をもってつなぐ。//

補題1.3　補題1.2の g に対して次のような分解がある；

$$g(x, y) = \sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)\, g_j(x, y) \qquad (x, y) \in U \times V$$

ここで $g_j(x, y)$ は y にかんして正則で，x にかんしては C^k-級の関数

[証]　$g(x, x) = 0$ だから $g(x, y)$ にRamirezの分解定理（[13] 定理2）を適用すればよい。

この g および g_j を用いて(1)をつくれば y にかんして正則な核 $\hat{\Omega}_y(x)$ をえる。

$$(3) \qquad \hat{\Omega}_y(x) \equiv \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1} g_j \bigwedge_{k \neq j} \bar{\partial}_x g_k\right) \wedge \bigwedge_{l=1}^{n} dx_l}{\left\{\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)\, g_j(x, y)\right\}^n}$$

これは $A \equiv \{(x, y) \in U \times V;\ \sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)\, g_j(x, y) \neq 0\}$ 上で定義された x についてtype $(n, n-1)$ の微分形式である。

補題1.1より次の定理をえる。

定理1.1　a)　$d_x \hat{\Omega}_y(x) = \bar{\partial}_x \hat{\Omega}_y(x) = 0$

b)　$\bar{\partial}_y \hat{\Omega}_y(x) = 0$　（つまり $\hat{\Omega}_y(x)$ は正則核である）

c)　for $^\forall f \in A(G)$

$$f(y) = \int_{\partial G} f(x)\,\hat{\Omega}_y(x) \qquad y \in G$$

$\hat{\Omega}_y(x)$ は $y \in G$ について正則ではあるが Bochner-Martinelli の核のような点特異性はもたない。そこで $\hat{\Omega}_y(x)$ の C^∞-拡張により点特異性をもった正則核をつくろう。$\partial G \times G$ 上で $\mathrm{Re}\, g > 0$ という条件はそれを可能にする。

$U_1 \Subset U$ なる ∂G の近傍をとる。$U^* = U \cup G$ とおく。また $N = \{(x, y) \in \bar{U}_1 \times G \;;\; \mathrm{Re}\, g(x, y) \leq 0\}$ とする.

このとき次の条件をみたすような $U^* \times G$ 上の C^∞-級関数 ψ がある。

i)　$0 \leqq \psi \leqq 1$

ii)　$\partial G \times G$ のある近傍 W_1 と $N \cup ((U^* - U_1) \times G)$ の近傍 W_2 に対して

$$\psi | W_1 \equiv 1 \qquad \psi | W_2 \equiv 0$$

そこでこの ψ を用いて g_j', g' を次のようにつくる。

$$g_j'(x, y) = \psi\, g_j(x, y) + (1 - \psi)(\bar{x}_j - \bar{y}_j) \qquad j = 1, \cdots, n$$

$$g'(x, y) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)\, g_j'(x, y)$$

$$= \psi\, g(x, y) + (1 - \psi) \| x - y \|^2$$

このとき明らかにW_1では$g'_j = g_j$, またg_jは$\partial G\times G$の近傍(in $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n$)で$y$にかんして正則だから$g'_j$もそうである。かつ

$$\mathrm{Re}(g'(x,y)) > 0 \quad \text{for } \forall (x,y)\in (U\cup G)\times G - D$$

このg'_jをもちいてつくった核$\Omega_y(x)$をRamirezの核とよぼう。Ramirezの核は$y\in G$にかんして正則かつ点特異性をもつ$B \equiv (V\times G) - D$ (V: Gのある近傍)上で定義された微分形式である。

$$(3')\qquad \Omega_y(x) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\,\frac{\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1} g'_j \bigwedge_{k\neq j} \bar\partial_x g'_k\right)\wedge \bigwedge_{l=1}^{n} dx_l}{g'(x,y)^n}$$

定理1.2　a)　$d_x\,\Omega_y(x) = \bar\partial_x\,\Omega_y(x) = 0$　in B

b)　$\bar\partial_y\,\Omega_y(x) = 0$　in a neighbourhood of $\partial G\times G$

c)　for $\forall f\in A(D)$

$$f(y) = \int_{\partial G} f(x)\,\Omega_y(x) \qquad \text{for } \forall y\in G$$

注)　Henkin[5]もやはり補題1.1から出発して(3)で与えられる正則核$\hat\Omega_y(x)$をえている。彼はHörmander[7]の結果とHeferの公式を使って$y\in G$について正則な$g_j(x,y)$をつくっている。

§2. $\bar\partial$-問題の解とその estimate.

ωを複素平面の領域とするとき任意の$f(y)\in A(\omega)$に対して Cauchyの積分表示が成立する。(ωは有界とする.)

$$f(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\omega}\frac{f(x)}{x-y}dx \qquad \text{for}\ {}^\forall y\in\omega$$

この核$\dfrac{1}{x-y}$はyにかんして正則で点特異性をもち,

$$\int_\omega \frac{d\lambda(x)}{|x-y|}\leqq K$$

をみたす。Kはyに無関係なconstantでωが有界だから$K<+\infty$. $d\lambda(x)$は複素平面上のLebesgue measure.

Grauert-Lieb [3]はRamirezの核$\Omega_y(x)$についても同じようなL^1-estimateが成立することを証明した。つまり

定理2.1 Gは今まで通りの領域とする. Gに対する(3)'で定義したRamirezの核$\Omega_y(x)$の各項の係数$b(x,y)$に対して

$$\int_G |b(x,y)|\,d\lambda(x)\leqq K$$

ここで$d\lambda(x)$は$\mathbb{C}^n$のLebesgue measure

が成立する。Kはyに無関係な定数だがGおよび多重劣調和関数φに関係する。

αは有界強擬凸領域G上で定義された$\bar\partial$-closedなC^∞ form of type (0,1)とする. つまり

$$(4)\qquad \alpha = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu(x)\, d\bar{x}_\nu \qquad \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \bar{x}_\mu} = \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial \bar{x}_\nu} \quad (\nu, \mu = 1 \cdots n)$$

この α に対し

$$(5)\qquad \bar{\partial} u = \alpha \qquad \text{i.e} \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_\nu} = \alpha_\nu \quad (\nu = 1, \cdots, n)$$

となる C^∞ 関数 u を求めるのが $\bar{\partial}$-問題であるが，その解が存在することはいろいろな方法で証明されている。(例えば Gunning-Rossi [4] Hörmander [7] など) もちろんその解は一意的には定まらない。

補題 2.1 ([3]) G において

$$(6)\qquad u(y) = -\int_G \alpha(x) \wedge \Omega_y(x)$$

は (5) の1つの解である。

[証] G は強擬凸であるから $\bar{\partial} v = \alpha$ となる G 上 C^∞ 関数 v がある。$u = v +$ (正則関数) を示せばよい。くわしいことは省略する。//

定理 2.1 を使って (6) を評価すると次の定理がえられる。

定理 2.2. G に対して G のみに depend する次のような定数 K がある； G 上の任意の $\bar{\partial}$-closed な C^∞-form α of type (0, 1) に対し G 上の C^∞-関数 u があって

$$\bar{\partial} u = \alpha \qquad |u| < K|\alpha|$$

ただし

$$|\alpha| \equiv \max_\nu \sup_{x \in G} |\alpha_\nu(x)|$$

$$|u| \equiv \sup_{x \in G} |u(x)|$$

とする。

注) Henkin [6] も同じ結果をだしている。

一方 Kerzmann [9] は Hörmander, Ramirez, Grauert-Lieb などの考えをまとめて $\overline{G}$ の各点の近傍での $\bar\partial u=\alpha$ の local な解の1つを積分であらわし，それを評価し，local theorem をえたあと，global theorem を証明した。それについてのべるためいくつか記号を説明する．

$V\subset\mathbb{C}^n$ は開集合とし，ϕ は $C^4[V]$ にぞくする強多重劣調和関数，$D=\{z\in V;\ \phi(z)<0\}$ とする。$B(\zeta,r)$ は ζ 中心，半径 r の $\mathbb{C}^n$ 内の ball とする．

$1\leq p\leq+\infty$ に対して $L^p_{0,1}(V)$ を係数が $L^p(V)$ にぞくするような $(0,1)$-form の全体とする。$|\alpha(z)|=\sum_{j=1}^n|\alpha_j(z)|$ とおく。

$L^p_{0,1}(V)$ は norm $\|\alpha\|_p=\||\alpha|\|_p$ にかんして Banach space をなす．ただし $1\leq p<\infty$ のとき $\|\alpha\|_p=\left(\int_V|\alpha(z)|^p d\lambda(z)\right)^{\frac{1}{p}}$ で $\|\alpha\|_\infty$ は $|\alpha(z)|$, $z\in V$ の essential sup とする．このとき

定理 2.3 ([9] Theorem 1.3.1) 境界に近い $\overline{D}$ の点 ζ に対し次のような ball $B(\zeta,r)$ がある: $\forall\alpha\in L^p_{0,1}(D)$ $(\bar\partial\alpha=0)$ に対し $u\in L^p(D\cap B(\zeta,a))$ があって

$$\bar\partial u=\alpha \quad (\bar\partial \text{ は distribution の意味で})$$

$$(7)\qquad \|u\|_{L^p(D\cap B(\zeta,r))}\leq K\|\alpha\|_{L^p_{0,1}(D)}$$

をみたす。

これから次の global theorem がえられる。

定理 2.4. G は前の通りとする。α は $\bar\partial$-closed な $(0,1)$-form で $\alpha \in L^p_{0,1}(G)$, このとき $\bar\partial u = \alpha$ の解 u で

$$\|u\|_{L^p(G)} \leqq K\|\alpha\|_{L^p_{0,1}(G)} \qquad 1 \leqq p \leqq \infty$$

をみたすものがある。

注). $p=2$ のときは Hörmander [7] によりすでにえられ, $p=\infty$ のときが Grauert-Lieb の結果である。また定理 2.3 は定理 2.4, 従ってこの節でえられた結果が Stein 多様体 M 内の強擬凸領域 $G \Subset M$ へも拡張できることを示している。

§3. 応用

定理 2.2 よりすぐに Čech の cohomology に対する次の結果をえる。G は前の通りの領域とする。

$\hat{\mathfrak{U}} = \{\hat U_1, \cdots, \hat U_r\}$ を $\bar G$ の有限開被ふく, $\mathfrak{U} = \hat{\mathfrak{U}} \cap G = \{U_\rho = \hat U_\rho \cap G\}$ とする。

1-cocycle $\xi \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ をとる。$\xi = \{\xi_{ij}\}$

$$|\xi| = \max_{i,j} |\xi_{ij}| \qquad |\xi_{ij}| = \sup_{x \in U_i \cap U_j} |\xi_{ij}(x)|$$

とおく。

定理 3.1 ([3] Satz 5) G に対し G のみに depend する定数 $K < +\infty$ がある; 任意の $\xi \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ に対して $\xi' \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ があって $\delta\xi' = \xi$, $|\xi'| \leqq K|\xi|$

系. Gで正則, $\bar{G}$で有界な関数の芽のなすsheafを$\mathcal{B}$とすれば　$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{B}) = 0$

注) Kerzmannによればこれらの結果はStein多様体内の強擬凸領域に対しても成立する。

また次の近似定理が証明される。(Lieb [11], Kerzmann [9]).

定理 3.2　Gは前の通りとする.

1°) あるopen set $\hat{G} \supset\supset G$があって$A(G)$にぞくする関数は$\hat{G}$上の正則関数により$\bar{G}$で一様に近似される。

2°) Gで正則かつ$L^p(G)$ $(0 \leq p \leq \infty)$にぞくする関数fに対して$\hat{G}$で正則な関数の列$\hat{f}_n$ $(n=1,2,\cdots)$があって$\hat{f}_n$はfにG内でcompactly uniformally convergeする。かつ

$$\|\hat{f}_n\|_{L^p(G)} \leq K\|f\|_{L^p(G)}$$

ここで　$K = K(G)$はf, n, pに無関係な定数.

注) Henkin [5]も1°)と同じ近似定理を与えている。また定理3.2はStein多様体内の強擬凸領域Gでも成立する。

文　献

[1] Bungart, L : Holomorphic functions with values in

locally convex spaces and applications to integral formulas. Trans. Am. Math. Soc (2) 111, 317 ~ 344 (1964)

[2] Gleason, A: The abstract theorem of Cauchy-Weil. Pacific J. Math 12, 511 ~ 525 (1962)

[3] Grauert, H and Lieb, I; Das Ramirezsche Integral und die Lösung der Gleichung $\bar{\partial} f = \alpha$ in Bereich der beschränkten Formen. Rice Univ. Studies 56 No. 2

[4] Gunning, R and Rossi, H Analytic functions of several complex variables. Prentice Hall 1965

[5]. Henkin, G: Integral representations of holomorphic functions in strongly pseudoconvex domains and certain applications. Math. Sbor. Vol 78 (1969)

[6] Henkin, G: Integral representations of functions in a strongly pseudoconvex domain and application to the $\bar{\partial}$-problem. Math Sbor. Vol 82 (1970)

[7] Hörmander, L; L^2-estimate and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, Acta Math.

Vol. 113 (1965) pp 89 ~ 152

[8]. Hörmander, L ; An Introduction to Complex Analysis in Several Variables. Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1966

[9]. Kerzmann, N ; Hölder and L^p-estimate for solutions of $\bar{\partial}u = f$ in strongly pseudoconvex domains, Comm. pure and appl. math. Vol XXIV, (1971) pp 301 ~ 379

[10] Koppelman, W : The Cauchy integral for functions of several complex variables, Bull. Amer. Math. Soc. Vol 73 (1967) pp 373 − 377.

[11] Lieb, I: Ein Approximationssatz auf streng pseudokonvexen Gebieten. Math. Ann, Vol 84 (1969) pp 56 − 60

[12] Lieb, I ; Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf streng pseudokonvexen Gebieten. Math. Ann. 190, 6 ~ 44 (1970)

[13] Ramirez, de A. E ; Ein Divisionsproblem in der komplexen Analysis mit einer Anwendung auf Randintegraldarstellungen. Math. Ann Vol 184 (1970) pp 172 − 187