数理解析研究所講究録
第143巻 1972年 15-30

Dominated extension と linear lifting

北大 応電研　安藤毅

Dominated extension に関する Bishop-Gamelin の結果，linear lifting の存在に関する Pelczynski-Michael の結果を一般の Banach 空間の立場から統一的に取り扱う。この方法は order のある Banach 空間に関する Davies-Perdrizet の結果にも適用される。

§1. 準備

E を(実または複素) Banach 空間とし U をその単位球とする。E^* 及び E^{**} は E の dual 及び second dual である。E は E^{**} の中に自然的に埋めこむ。E (及び E^{**}) の元を $x, y, z, \cdots$ で E^* の元を $f, g, h, \cdots$ であらわす。E^* の $\sigma(E^*, E)$ 位相，E^{**} の $\sigma(E^{**}, E^*)$ 位相をそれぞれ weak* 位相，weak** 位相と呼ぶ。

$S, S_1, S_2 \cdots$ 等は E の閉凸部分集合で 0 を含むものとする。

S の E^{**} での weak**閉包を $S^{\sim}$ とかく。

S° で S の polar をあらわすと，分離定理より $(S_1 \cap S_2)^{\circ}$ は $\mathrm{conv}(S_1^{\circ} \cup S_2^{\circ})$ の weak*閉包となる。$S^{\sim}$ は $\langle E^{**}, E^{*}\rangle$ なる双対関係の下での S° の polar と一致する，従って $S^{\sim} \cap E = S$ となる。このことから $(S_1 \cap S_2)^{\sim} = S_1^{\sim} \cap S_2^{\sim}$ が成立する必充条件は $\mathrm{conv}(S_1^{\circ} \cup S_2^{\circ})$ の norm 閉包と weak*閉包が一致することである。Kreín - Smulían の定理によれば $\mathrm{conv}(S_1^{\circ} \cup S_2^{\circ})$ 自身が weak* 閉になる必充条件は全ての n に対し $nU^{\circ} \cap \mathrm{conv}(S_1^{\circ} \cup S_2^{\circ})$ が weak* compact となることである。S_1 が 0 を内点としてもてばこの条件は常にみたされる。S_1，S_2 が共に部分空間のときは $S_1^{\perp} + S_2^{\perp}$ が weak* 閉となる必充条件は $S_1 + S_2$ が閉なることである。

§2.　閉値域定理

M は E の閉部分空間で，E^{*} から $M^{\perp}$ への(連続な)射影 P があるものとする。$Q = 1 - P$ とおく。また E から E/M への商写像を τ とかく。

S° が $\mathrm{conv}(P(S^{\circ}) \cup Q(S^{\circ}))$ の norm閉包と一致するとき S

は（(M, P) に関して）<u>*splittable*</u> という。

〔補題 1〕 次の条件は同値である。

(a) S は *splittable*.

(b) $S^{\sim} = \{x \in E^{**};\ P^{*}x \in S^{\sim},\quad Q^{*}x \in S^{\sim}\}$

(c) $\theta(f) = \theta(Pf) + \theta(Qf) \qquad (f \in E^{*})$

ここで

$$\theta(f) = \sup_{x \in S} \mathrm{Re}\, f(x).$$

〔系〕 (a) 単位球 U が *splittable* となる条件は

$$\|f\| = \|Pf\| + \|Qf\| \qquad (f \in E^{*})$$

(b) S_1, S_2 が *splittable* で $(S_1 \cap S_2)^{\sim} = S_1^{\sim} \cap S_2^{\sim}$ なら $S_1 \cap S_2$ も *splittable* である。

(c) S が cone のとき，*splittable* となる条件は $P(S^{\circ}) \subseteq S^{\circ}$ 及び $Q(S^{\circ}) \subseteq S^{\circ}$ となること。

〔補題 2〕 S_1, S_2 が *splittable* であれば，どの $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$ に対しても

$$\{S_1 \cap (S_2 + \varepsilon U) + \rho U\} \cap \overline{(S_1 + M)} \cap \overline{(S_2 + M)}$$
$$\subseteq \overline{S_1 \cap (S_2 + \alpha\varepsilon U) + \alpha\rho U \cap M}.$$

ここで $\alpha = \|Q\|$ である。

(証明) 左辺の元 x をとると補題1より

$$Q^*x \in \tilde{S}_1 \cap (\tilde{S}_2 + \alpha\varepsilon \tilde{U} \cap M) + \alpha\rho \tilde{U} \cap \tilde{M}。$$

従って $y \in \alpha\rho \tilde{U} \cap M$ で

$$Q^*(x-y) \in \tilde{S}_1 \cap (\tilde{S}_2 + \alpha\varepsilon \tilde{U} \cap \tilde{M})$$

$$P^*(x-y) \in \tilde{S}_1 \cap \tilde{S}_2$$

となるものがある。これから補題1より $x-y \in \tilde{S}_1$ であり、また $z \in \alpha\varepsilon \tilde{U} \cap \tilde{M}$ で $x-y-z \in \tilde{S}_2$. 従って

$$x \in E \cap \{\tilde{S}_1 \cap (\tilde{S}_2 + \alpha\varepsilon \tilde{U}) + \alpha\rho \tilde{U} \cap \tilde{M}\}$$

$$\subseteq E \cap \{S_1 \cap (S_2 + \alpha\varepsilon U) + \alpha\rho U \cap M\}^{\sim}$$

$$= \overline{S_1 \cap (S_2 + \alpha\varepsilon U) + \alpha\rho U \cap M}.$$

〔補題3〕 S_1, S_2 は *splittable* とする。 $x \in (\overline{S_1 + M}) \cap (\overline{S_2 + M})$ で $\|x - S_1 \cap S_2\| < \gamma$ なら, $y \in x + M$ で $\|x - y\| < \gamma \|Q\|$ なるものがある。 $\|Q\| = 1$ の場合は $\forall \varepsilon > 0$ に対し上記の y は $S_1 \cap (S_2 + \varepsilon U)$ の中にとりうる。

(証明) $\alpha = \|Q\|$ とし $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ とする。

$$x \in \{S_1 \cap (S_2 + \varepsilon' U) + \gamma' U\} \cap (\overline{S_1 + M}) \cap (\overline{S_2 + M})$$

なる $0 < \gamma' < \gamma$ がある。 $\varepsilon_n > 0$ を $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \gamma - \gamma'$ ととる。補題2より $x_0 \in M$ で

$$\|x_0\| \leq \alpha\gamma' \text{ で } \|x + x_0 - S_1 \cap (S_2 + \alpha\varepsilon' U)\| < \varepsilon_1$$

のものがある。このとき

$$x + x_0 \in \overline{S_i + M} \quad で \quad x + x_0 \in S_1 \cap (S_2 + \alpha\varepsilon' U) + \varepsilon_1 U$$

となる。補題2を反復して使って $\{x_n\} \subset M$ で $\|x_n\| \leq \alpha\varepsilon_n$, $\|x + \sum_{i=0}^{n-1} x_i - S_1 \cap (S_2 + \alpha^n \varepsilon' U)\| < \varepsilon_n$ なるものがとれる。このとき $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| \leqslant \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n + \alpha r' < \alpha r$ より $y = x + \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ が定義出来，$y \in S_1 \cap (x + M)$ となる。$\alpha = 1$ のときは

$$y \in S_1 \cap (\overline{S_2 + \varepsilon' U}) \subseteq S_1 \cap (S_2 + \varepsilon U)$$

となる。

〔定理1〕 (a) S が *splittable* なら $\tau(S)$ は閉。

(b) S_1, S_2 が *splittable* で $(S_1 \cap S_2)^{\sim} = S_1^{\sim} \cap S_2^{\sim}$ なら $\tau(S_1 \cap S_2) = \tau(S_1) \cap \tau(S_2)$ 。

(c) S_1, S_2 が *splittable* で $\|Q\| \leq 1$ なら任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\tau(S_1) \cap \tau(S_2) \subseteq \tau(S_1 \cap (S_2 + \varepsilon U))$。

以下この§では単位球 U が *splittable*, 即ち

$$\|f\| = \|Pf\| + \|Qf\| \qquad (f \in E^*)$$

と仮定する。

〔補題4〕 閉部分空間 N に関し次は同値

(a) N は *splittable*

(b) $\|x - N\cap M\| \leq \|x - N\| \quad (x\in M)$

(c) $\|f - N^{\perp}\cap M^{\perp}\| \leq \|f - M^{\perp}\| \quad (f\in N^{\perp})$。

〔定理2〕 閉部分空間 N がある $1\leq \rho < 2$ で

$$\|x - N\cap M\| \leq \rho\|x - N\| \quad (x\in M)$$

を満たせば $\tau(N)$, $\tau(N\cap U)$ は閉で

$$\tau(N\cap U) = \tau(N)\cap\tau(U)。$$

（証明） 補題4と U の *splittable* なことから

$$\|Pf - M^{\perp}\cap N^{\perp}\| \leq \gamma\|Qf\| \quad (f\in N^{\perp})$$

ここで $\gamma = \rho - 1 < 1$。 $f\in N^{\perp}$, $g\in M^{\perp}$に対し

$$\|g - M^{\perp}\cap N^{\perp}\| \leq \|Pf - M^{\perp}\cap N^{\perp}\| + \|g - Pf\|$$
$$\leq \gamma\|Qf\| + \|g - Pf\| \leq \|g - f\|。$$

従って

$$\|g - M^{\perp}\cap N^{\perp}\| \leq \|g - N^{\perp}\| \quad (g\in M^{\perp})$$

補題4より

$$\|x - M\cap N\| \leq \|x - M\| \quad (x\in N)。$$

このことから直ちに $\tau(N)$ が閉なることは出るが更に

$$N\cap(U+M) \subseteq \overline{U + N\cap M}$$

が出る。求める $\tau(N)\cap\tau(U)\subseteq\tau(N\cap U)$ を得るには

$$N\cap(U+M) \subseteq U + N\cap M$$

が証明出来ればよい。

この最後の包含関係が成立しないと仮定する

$$x \in N \cap (U+M) \quad , \quad (U-x) \cap N \cap M = \emptyset$$

なる x が存在する。$M \cap N$ は部分空間であるから

$$\mathrm{conv}((U-x) \cup \{0\}) \cap N \cap M = \{0\}$$

で且 $\mathrm{conv}((U-x) \cup \{0\})$ は閉集合である。従って $(U-x)^{\circ}$ $+ N^{\perp} + M^{\perp}$ は E^* の中で weak* 稠密である。もしこれが更に weak* 閉なることが証明出来れば，E^* と一致して

$$\mathrm{conv}((U^{\sim}-x) \cup \{0\}) \cap N^{\sim} \cap M^{\sim} = \{0\}$$

となり

$$x \notin E \cap (U^{\sim} + N^{\sim} \cap M^{\sim}) = \overline{U + N \cap M}$$

となり矛盾が出て定理の証明が終る。

以下は $(U-x)^{\circ} + N^{\perp} + M^{\perp}$ の weak* 閉なることの証明。これは各 $n > 0$ に対し $\delta > 0$ があり

$$\{(U-x)^{\circ} + N^{\perp} + M^{\perp}\} \cap nU^{\circ} \subseteq \delta U^{\circ} \cap (U-x)^{\circ} + \delta U^{\circ} \cap N^{\perp} + M^{\perp}$$

が成り立つことが示されればよい。先ず最初に

$$(U-x)^{\circ} = \{ f : \|f\| \leq \mathrm{Re}\, f(x) + 1 \}$$

に注意すると，$f \in (U-x)^{\circ}$ のとき $x \in U + M$ より $\|P^* x\| \leq 1$ を考慮すれば

$$0 \leq 1 + \mathrm{Re}\, f(x) - \|f\|$$
$$\leq 1 + \mathrm{Re}\, Qf(x) - \|Qf\| - \{\|Pf\| \|P^* x\| - |Pf(P^* x)|\}$$
$$\leq 1 + \mathrm{Re}\, Qf(x) - \|Qf\|$$

となり $Qf \in (U-x)^{\circ}$ が出る。さて

$$f \in (U-x)^{\circ},\ g \in N^{\perp},\ h \in M^{\perp} \text{ で } \|f+g+h\| \leq n$$

とすると，$x \in N \cap (U+M)$ と $\|Qf+Qg\| \leq n$ より

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, Qf(x) &\leq n\|x\| - \mathrm{Re}\, g(x) = n\|x\| + \mathrm{Re}\, Pg(x) \\ &\leq n\|x\| + \|Pg - N^{\perp} \cap M^{\perp}\| \cdot \|x - M\| \\ &\leq n\|x\| + \|Pg - N^{\perp} \cap M^{\perp}\| \end{aligned}$$

$Qf \in (U-x)^{\circ}$ なることから

$$\begin{aligned} \|Qg\| &\leq n + \|Qf\| \leq n + \mathrm{Re}\, Qf(x) + 1 \\ &\leq n(\|x\|+2) + \|Pg - N^{\perp} \cap M^{\perp}\| . \end{aligned}$$

これから N に対する条件を使って

$$\|Pg - N^{\perp} \cap M^{\perp}\| \leq \frac{\gamma(n\|x\|+2)}{1-\gamma} \equiv \delta_1$$

従って

$$\|Qf + g - N^{\perp} \cap M^{\perp}\| \leq n + \delta_1 \equiv \delta_2 .$$

また $x \in N,\ g \in N^{\perp}$ 及び $Qf \in (U-x)^{\circ}$ より

$$\|Qf\| \leq \mathrm{Re}\, Qf(x) + 1 \leq \delta_2\|x\| + 1 \equiv \delta_3$$

で

$$\|g - N^{\perp} \cap M^{\perp}\| \leq \delta_2 + \delta_3 \equiv \delta .$$

よって

$$\begin{aligned} f + g + h &= Qf + g + (Pf + h) \\ &\in \delta U^{\circ} \cap (U-x)^{\circ} + \delta U^{\circ} \cap N^{\perp} + M^{\perp} \end{aligned}$$

となり目的が達せられた。

この§の結果と Bishop-Gamelin [2], [3] の結果の関係について述べる。

X を compact 集合，Y をその閉部分集合とする。$E = C(X)$ とし $M = \{x \in C(X);\ x|Y = 0\}$ とする。$M^{\perp}$ は support が Y に含まれる測度の全体となるから E^* から $M^{\perp}$ への射影 P は $Pf = \chi_Y f$ で与えられる，ここで f は X 上の測度で χ_Y は Y の特性函数である。この場合

$$\|f\| = \|Pf\| + \|Qf\|$$

は明らかであるからこの§の仮定は満たされている。

閉部分空間 N が $P(N^{\perp}) \subseteq N^{\perp}$ なら N は splittable となり，U は splittable であるから定理1より $\tau(N \cap U) = \tau(N) \cap \tau(U)$ となる。τ は函数を Y に restrict することに対応するからこの場合 $x \in N$ で $\|x|Y\| \leq 1$ なら $x|Y$ を $y \in N$ で $\|y\| \leq 1$ なる函数に拡張出来ることを示す。この事情は $p > 0$，$p|Y = 1$ なる連続函数を使って $C(X)$ の新しい norm

$$|||x||| = \|x/p\|$$

を使っても同様で，この時は $y \in A$ $|y| \leq p$ な拡張の存在が保証される。これが Bishop の結果である。

N が splittable でない時も $0 \leq \gamma < 1$ があり

$$\|Pf - M^{\perp} \cap N^{\perp}\| \leq \gamma \|Qf\| \qquad (f \in N^{\perp})$$

がいえれば定理2より $\tau(N \cap U) = \tau(N) \cap \tau(U)$ が出て同

じ拡張定理が得られる。$C(X)$の新しい norm として $p>\delta$, $p|Y=1$ な連続函数 p を使って $|||x|||=\|x/p\|$ としても事情は同じになり，Gamelin の結果をうる。

§3. Linear lifting

前の§と同様にE^*から$M^\perp$への射影Pがあり

$$\|f\| = \|Pf\| + \|Qf\| \qquad (f \in E^*)$$

とする。ここで $Q=1-P$ である。またτはEからE/Mへの商写像である。

E/MからEへの連続な線形写像で $\tau\circ\varphi=1$ のものを linear lifting と呼ぶ。このとき明らかに $1-\varphi\circ\tau$ はMへの射影になる。

一般にF_1, F_2が Banach空間のとき，F_1とF_2の projective な tensor 積を $F_1\hat{\otimes}F_2$, inductive な tensor 積を $F_1\check{\otimes}F_2$であらわす。また $B(F_1, F_2)$でF_1からF_2への連続な線形写像の全体のなす Banach空間とする。

以下ではFは有限次元 Banach 空間でその単位球をVとする。

〔補題5〕 自然的対応の下で *isometric* の意味で次の関係が成り立つ

$B(F,E)=F^{*}\check{\otimes}E$, $B(F,E)^{*}=F\hat{\otimes}E^{*}$, $B(F,E)^{**}=B(F,E^{**})$

KがFの部分集合，SがEの閉凸部分集合で0を含むとき

$$G(K,S)=\{\varphi\in B(F,E)\,;\,\varphi(K)\subseteq S\}$$
$$G(K,S^{\sim})=\{\varphi\in B(F,E^{**})\,;\,\varphi(K)\subseteq S^{\sim}\}$$

と書く。$G(K,S)$の$B(F,E^{**})$での *weak*** 閉包を$G(K,S)^{\sim}$とかく。

〔系〕 (a) $G(V,U)^{\sim}=G(V,U^{\sim})$

(b) HがFの部分空間，NがEの閉部分空間のとき

$$\{G(H,0)\cap G(F,N)\}^{\sim}=G(H,0)\cap G(F,N^{\sim})$$

(c) $1\otimes P$ は $G(F,M)^{\perp}$ への射影となる。

このことから$G(F,M)$と$B(F,E)$の関係はMとEとの関係と似たものになり、$B(F,E)$の閉凸集合で0を含むものに対し$(G(F,M),1\otimes P)$- *splittable* が定義出来るがこれを簡単に *splittable* ということにする。

〔補題6〕 Sが *splittable* で$G(K,S)^{\sim}=G(K,S^{\sim})$と

する。また π は F から部分空間 H への射影とする。もし

$$\psi \in G(\pi(K), S) \cap G(\pi(V), U) \cap G(K, S+M) \cap G(V, U+M)$$

なら任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\varphi \in G(K, S) \cap G(V, U)$ で

$$\tau \circ \varphi = \tau \circ \psi, \quad \|(\varphi - \psi)|H\| < \varepsilon$$

のものがある。

（証明） $\psi_1 = \psi - Q^* \circ \psi \circ (1-\pi)$ とすると

$$Q^* \circ \psi_1(K) \subseteq Q^* \circ \psi \circ \pi(K) \subseteq Q^*(S) \subseteq S^\sim$$

$$P^* \circ \psi_1(K) \subseteq P^* \circ \psi(K) \subseteq P^*(S+M) \subseteq S^\sim$$

従って S の *splittable* のことから $\psi_1 \in G(K, S^\sim)$ となり，仮定より $\psi_1 \in G(K, S)^\sim$ となる。同様に系を使って $\psi_1 \in G(V, U)^\sim$ となり，$G(V, U)$ が $B(F, E)$ の単位球なることから，$\psi_1 \in \{G(K, S) \cap G(V, U)\}^\sim$ となる。また

$$Q^* \circ \psi \circ (1-\pi) \in G(H, 0) \cap G(F, M^\sim) = \{G(H, 0) \cap G(F, M)\}^\sim$$

より ψ は

$$G(K, S) \cap G(V, U) + G(H, 0) \cap G(F, M)$$

の *norm* 閉包に入る。従って $\psi_2 \in B(F, E)$ で

$$\psi - \psi_2 \in G(H, 0) \cap G(F, M), \quad \|\psi_2 - G(K, S) \cap G(V, U)\| < \varepsilon$$

のものがある。所で $G(K, S) \cap G(V, U)$ は *splittable* になり補題3より $\varphi \in G(K, S) \cap G(V, U)$ で

$$\varphi - \psi_2 \in G(F, M), \quad \|\varphi - \psi_2\| < \varepsilon$$

となるものがある。$\psi_2 - \psi \in G(H, 0) \cap G(F, M)$ より $\tau \circ \varphi =$

$\tau \circ \psi$ 及び

$$\|(\varphi-\psi)|H\| = \|(\varphi-\psi_2)|H\| \leq \|\varphi-\psi_2\| < \varepsilon \ .$$

次に S は *splittable* で，L は $\tau(S)$ の部分集合とする。次のような E/M の射影の列 $\{\pi_n\}$ が存在するとする：

(1)　$F_n = \pi_n(E/M)$ は有限次元

(2)　$\|\pi_n\| \leq 1$

(3)　$\pi_n \cdot \pi_m = \pi_n \ (n \leq m)$

(4)　$\pi_n(L) \subseteq L$

(5)　π_n は 1 に強収束する。

$$G_n = \{\varphi \in B(F_n, E);\ \varphi \circ \pi_n(L) \subseteq S\}$$
$$\hat{G}_n = \{\psi \in B(F_n, E^{**});\ \psi \circ \pi_n(L) \subseteq S^{\sim}\}$$

とする。前と同じ様に $B(F_n, E)^{**} = B(F_n, E^{**})$ と考える。

〔補題7〕 全ての n に対し G_n の $B(F_n, E^{**})$ の中での *weak*** 閉包が $\hat{G}_n$ と一致すれば，E/M から E への *linear lifting* φ で $\varphi(L) \subseteq S$，$\|\varphi\| \leq 1$ のものが存在する。

（証明）　$\pi_0 = 0$，$\varphi_0 = 0$ として，$\varphi_j \in B(F_j, E)$ （$j = 0, 1, 2, \cdots, n$）が

$$\tau\circ\varphi_j = 1 \ , \quad \varphi_j\circ\pi_j(L) \subseteq S \ , \quad \|\varphi_j\| \le 1$$
$$\|(\varphi_{j-1} - \varphi_j)|F_{j-1}\| < 1/2^{j-1}$$

を満たすように択ばれたとする。F_{n+1} は有限次元であるから $\psi \in B(F_{n+1}, E)$ で $\tau\circ\psi = 1$ となるものがある。$\psi' = \varphi_n\circ\pi_n + \psi\circ(1-\pi_n)$ とすると

$$\psi'\circ\pi_n(\pi_{n+1}(L)) = \varphi_n\circ\pi_n(L) \subseteq S .$$

また $\|\pi_n\| \le 1$ より

$$\psi'\circ\pi_n(V_{n+1}) = \varphi_n(V_n) \subseteq U$$

ここで V_j は F_j の単位球である。$V_{n+1} \subseteq \tau(U)$　$\tau_{n+1}(L) \subseteq \tau(S)$ より

$$\psi'(V_{n+1}) \subseteq U + M \ , \quad \psi'(\pi_{n+1}(L)) \subseteq S + M .$$

補題6を $F = F_{n+1}$, $K = \pi_{n+1}(L)$, $\pi = \pi_n$ に適用して $\varphi_{n+1} \in G_{n+1}$ で

$$\|\varphi_{n+1}\| \le 1, \quad \tau\circ\varphi_{n+1} = 1, \quad \|(\varphi_n - \varphi_{n+1})|F_n\| < 1/2^n$$

のものがある。このようにして $\{\varphi_n\}$ を作ると明らかに $\varphi_n\circ\pi_n$ は $n\to\infty$ のとき或る $\varphi \in B(E/M, E)$ に強収束し，φ が求める *linear lifting* となる。

〔定理3〕 E/M の有限次元部分空間の列 $\{F_n\}$ で (1) $F_1 \subset F_2 \subset \cdots$, (2) $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n} = E/M$, (3) 各 F_n へは *norm* 1 の射影が存在する，といった条件を満たすものがあれば，

E/M から E への *linear lifting* で norm 1 のものが存在する。

この§の結果と Pełczyński - Michael〔4〕の結果との関係をのべる。

前節の如し X が compact 集合，Y をその閉部分集合とし，$E=C(X)$，$M=\{x\in C(X);\ x|Y=0\}$ とする。P^* を E^* から $M^\perp$ への自然な射影とする。

N が $C(X)$ の閉部分空間で $P(N^\perp)=\{0\}$ とすると，$N/N\cap M$ は $C(Y)$ と *isometric* になり且 Banach 空間 N の *dual* からその中での $(N\cap M)^\perp$ への自然な射影が得られる。従って N と $N\cap M$ の関係と E と M の関係と同様になる。今 Y が *metrizable* であると $C(Y)=N/N\cap M$ は定理3の中の E/M に仮定されたような部分空間の列を持つことは知られて居る。従って定理3から $C(Y)=N/N\cap M)$ から N への norm 1 の *linear lifting* の存在が保証される。これが Pełczyński - Michael の結果である。

§4. 付記

この報告の内容は主として Ando〔1〕によった。§3 で定理

3を導出するだけを目的とするなら，補題はもっと簡単な形に与え得る。これらの補題は *ordered Banach* 空間の場合の *positive linear lifting* の証明に使用出来る様に一般な形でのべてある。詳しくは〔1〕にゆずる。

文 献

〔1〕 T. Ando, Colsed range theorems for convex sets and linear liftings, (to appear)

〔2〕 E. Bishop, A general Rudin-Carleson theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 13(1962)

〔3〕 T. Gamelin, Restrictions of subspaces of C(X), Trans. Amer. Math. Soc. 112(1964)

〔4〕 E. Michael-A. Pelcynski, A linear extension theorem Ill. J. Math. 11(1967)