数理解析研究所講究録
第143巻 1972年 31-44

Absolute summable map と Nuclear map について

琉球大　理工　石川 弘

§1 序

Banach 空間上の作用素の class についての理論は現在まだまだ不十分な状態にあるが理論の主要部として Hilbert 空間で既に考えられている class の Banach 空間への拡張がある。Hilbert 空間上でよく考えられているのは ideal $S_p(H, H)$ である。ここで有界作用素 T が $S_p(H, H)$ に入るとは正規直交系 (e_n), (f_n) と $(\tau_n) \in l_p$ が存在して

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n (x, e_n) f_n$$

とかけることをいう。この時 $\sigma_p(T) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\tau_n|^p\right)^{1/p}$ は $1 \leq p < \infty$ の時にはノルム，$0 < p < 1$ の時は p-ノルム（$\sigma_p(S+T)^p \leq \sigma_p(S)^p + \sigma_p(T)^p$）になる。$p = 2$ の時が Hilbert-Schmidt 作用素の class である。ここでは $S_2(H,H)$ $S_1(H, H)$ の Banach 空間への拡張について主として A. Pietsch の仕事を中心に現在迄知られていることを紹介して

み[illegible]たい。 pの他の値の時の拡張も、l_p-ノルム(又はp-ノルム)を使用すれば大体以下の議論と平行に行うことができる。

§2. Absolute-summable map.

以下Eをnormed space, E^*をその共役空間とする。Iを任意のindex setとし、Iの有限集合の全体$\mathfrak{F}(I)$について包含関係できまる大小により、directed setと$\mathfrak{F}(I)$を考える。Eの元のI族$[x_i, I]$, 又$J\in\mathfrak{F}(I)$に対して$[x_i(J), I]$は$i\in J$のとき$x_i(J)=x_i$, そうでないとき0をとるI族をあらわすものとする。E, E^*の単位球をU, U^*とかく。I族に次のsummabilityを考える。

任意の$a\in E^*$について $\sum_I|\langle x_i, a\rangle|<\infty$ のとき、$[x_i, I]$をweakly summableという。

又 $\sum_I\|x_i\|<\infty$ のとき、$[x_i, I]$をabsolute-summableという。$l_I^1[E]$, $l_I^1\{E\}$でweak-, absolute-summable family $[x_i, I]$のつくる(vector)空間をあらわすことにする。$l_I^1[E]$の元について

$$\varepsilon[x_i, I]=\sup\{\sum|\langle x_i, a\rangle| \,;\, a\in U^*\}$$

とおくと、これは$l_I^1[E]$のノルムになる。次にこのノルムによって

$$\lim_J[x_i(J), I]=[x_i, I]$$

となるものの全体を $l_I^1(E)$ とかくことにする。$l_I^1(E)$ の元を summable という。更に $l_I^1\{E\}$ の中でノルム

$$\pi[x_i, I] = \sum_I \|x_i\|$$

をとると、定義から直ちに

$$l_I^1\{E\} \subset l_I^1(E) \subset l_I^1[E], \quad \varepsilon[x_i, I] \leqq \pi[x_i, I]$$

で且つ、$l_I^1(E)$ は $l_I^1[E]$ の中で閉である。今 E から F への連続な作用素のつくる空間を $\mathcal{L}(E, F)$ とかくことにすると、任意の $T \in \mathcal{L}(E, F)$ は作用素

$$T_I ; l_I^1[E] \longrightarrow l_I^1[F]$$

をひきおこすが、ここで T_I が更に $l_I^1\{E\}$ を $l_I^1\{F\}$ に写すとき、T を absolute-summable な作用素という。（以下簡単のため AS とかく）。AS-map の全体を $\mathcal{P}(E, F)$ とかく。この定義は index set I のとり方には関係しない。実際次のことが成立する。

命題 2.1. $T \in \mathcal{L}(E, F)$ が AS であるためには次のことが成立つことが必要十分である。即ちすべての有限集合 $[x_i ; i = 1, 2, \cdots n]$ について

$$\sum_{i=1}^{n} \|Tx_i\| \leqq \rho \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, a\rangle| ; a \in U^*\right\}$$

ここで $\rho \geqq 0$ は有限集合とは無関係な定数。

例えば $C[0,1]$ より $L[0,1]$ への identity map は AS である。実際 δ_t を Dirac 測度とすると、

$x_1, x_2, \cdots x_n \in C[0,1]$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 |x_i(t)|\,dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, \delta_t \rangle|\,dt$$
$$\leq \sup\{\sum |\langle x_i, a\rangle| \;;\; \underset{\|a\|\leq 1}{a \in L^\infty[0,1]}\}$$

AS-map T について、命題1の ρ の下限を $\pi(T)$ とおくと、

命題 2.2 $\pi(T)$ は $P(E,F)$ のノルムである。更に F が Banach 空間の時は $P(E,F)$ もこのノルムで Banach 空間となる。

$\pi(T)$ は又 T_I の作用素ノルムに等なっている。任意の p についても上と同様に absolute p-summable map が定義出来るが Hilbert 空間においては、$1 \leq p \leq 2$ について、これらは Hilbert-Schmidt 作用素の class に一致することが言える。しかし A. Petczyński は [2] において、すべての $1 \leq p < \infty$ について Absolute p-summable map の class は Hilbert-Schmidt 作用素の class と一致することを証明している。従って $P(E,E)$ は $S_2(H,H)$ の拡張になっているわけである。AS-作用素の積については次の結果がある。ノルム空間 E, F, G について

命題 2.3 $E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$ のとき、S, T のいずれかが AS ならば ST も又 AS で

$\pi(ST) \leq \pi(S)\|T\|$ 又は $\|S\|\pi(T)$

Δを $[0,1]$ 又は複素平面の単位円板とし $\Delta_I = \prod_I \Delta$ とおく。今任意の $[x_i, I] \in l_I^1(E)$ に対して

$$\Phi(\alpha_i, a) = \sum_I \alpha_i \langle x_i, a \rangle \qquad (\alpha_i, a) \in \Delta_I \times U^*$$

とおくと、Φ はコンパクト空間 $\Delta_I \times U^*$ 上の連続関数となり更に

$$\|\Phi\| = \varepsilon[x_i, I].$$

よって $[x_i, I] \longrightarrow \Phi$ という対応によって $l_I^1(E)$ は $C(\Delta_I \times U^*)$ の中に isometric に embed される。このことをもとにして

定理2.1. $T \in \mathcal{L}(E, F)$ が AS になるための必要十分条件は、U^*上に positive な測度μが存在して任意の $x \in E$ について

$$\|Tx\| \leqq \int_{U^*} |\langle x, a \rangle| \, d\mu$$

が成立つことである。$\pi(T)$ は上のような測度のノルムの下限であるが、更にこの中には、$\mu_0(U^*) = \pi(T)$ となるものが存在する。

証明. 十分性はほとんど明らかだから必要性のみのべてみる。index set I として F^* の単位球 V^* をとる。$T \in \mathcal{P}(E, F)$ に対して上の下限に到達するような正値測度μ_0の存在を示そう。今

$$\langle [x_i, I], a \rangle = \sum_I \langle Tx_i, b_i \rangle. \qquad b_i \in V^*$$

とおくとこれは $l_I^1(E)$ 上の有界な linear functional であ

る。よって前述のことから Hahn-Banach の定理により、これは $C(\Delta_I \times U^*)$ 上の linear functional にノルムを保存して拡大出来る。そこでこれに対応する測度を ν とすると

$$\langle [x_i, I], a \rangle = \int \Phi(\alpha_i, a)\, d\nu$$

又つくり方から $\|\nu\| \leq \pi(T)$. 次に ν の絶対値測度から U^* に induce された正値測度を μ_0 とする. $\|\mu_0\| = \||\nu|\| = \|\nu\| \leq \pi(T)$. そこで今 I 族として $x_j = x$　$i \neq j$ のときは $x_i = 0$ となるものをとると

$$\langle Tx, b_j \rangle = \int \alpha_j \langle x, a \rangle\, d\nu$$

よって

$$|\langle Tx, b_j \rangle| \leq \int_{\Delta_I \times U^*} |\langle x, a \rangle|\, d|\nu| = \int_{U^*} |\langle x, a \rangle|\, d\mu_0$$

$I = U^*$ だから、これから

$$\| Tx \| \leq \int_{U^*} |\langle x, a \rangle|\, d\mu_0 \qquad \text{証明了.}$$

この定理を absolute 2-summable 作用素について証明すると、その応用としてよく知られた Dvoretzky-Rogers の定理の別証が得られる。

§3. Nuclear 作用素.

前節に従って $S_1(H, H)$ の拡張として nuclear 作用素につい

て考えてみる。 $T\in\mathcal{L}(E,F)$ について $(a_n)\subset E^*$, $(y_n)\subset F$ が存在して $\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|\|y_i\|<\infty$ であり且つ

$$Tx=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x, a_i\rangle y_i$$

とかけるとき、Tを nuclear 作用素という。EよりFへのすべての nuclear 作用素のつくる空間を $\mathcal{N}(E,F)$ とかく。ここで

$$\nu(T)=\inf\sum_{i=1}^{\infty}\|a_i\|\|y_i\|$$

（但し inf は上のような表現全部にわたるものとする）。
とおくと、$\nu(T)$ は $\mathcal{N}(E,F)$ のノルムを与える。$N(E,F)$ は F が Banach 空間のとき、Banach空間となる。又他の基本的性質として $T\in\mathcal{N}(E,F)$ は precompact 作用素であり可分な値域をもつ。ノルム空間 E, F, G について $E\xrightarrow{T}F\xrightarrow{S}G$ を考え、T, S のいずれかが nuclear であるとすると、AB-作用素の時と同様に ST も又 nuclear となり

$$\nu(ST)\leq\nu(S)\|T\| \quad 又は \quad \leq\|S\|\nu(T)$$

である。定義から又 $P(E,F)\supset N(E,F)$, $\pi(T)\leq\nu(T)$.
ここで F が G の部分空間であるとき $T\in N(E,F)$ は常に $T\in\mathcal{N}(E,G)$ であるが、$T\in\mathcal{N}(E,G)$ で且つ $T(E)\subset F$ であっても、E から F への作用素として T は nuclear とは限らない。しかし F が G の dense な部分空間のときはこのことが成立ち且つ $\nu^G(T)=\nu^F(T)$ である。

§4. AB−作用素の分解.

この節では $p \neq 1$ での p-summable map についての結果も必要である. 一般に $1 \leq p < q$ のとき absolute p-summable 作用素と q-summable 作用素の class の間には

$\mathcal{P}_p(E, F) \subset \mathcal{P}_q(E, F)$ の関係があり $\pi_p \geq \pi_q$ である.

定理2.1 は勿論ノルムを変えれば absolute p-summable 作用素について成立ち, U^* に正値 Radon 測度 μ が存在して任意の $x \in E$ について

$$\| Tx \| \leq \pi_p(T)\left\{\int_{U^*} |\langle x, a\rangle|^p d\mu\right\}^{1/p}$$

となる. 今 M をコンパクトな Hausdorff 空間とし, μ を $\mu(M)=1$ となる正値測度とすると, $f \in C(M)$ を $f \in L^2(M, \mu)$ へ写す identity map K は absolute 2-summable となり $\pi_2(K) = 1$ である. 又

命題4.1 E を Hilbert 空間とすると $T \in \mathcal{L}(E, C(M))$ について KT は Hilbert-Schmidt 作用素で $\sigma(KT) = \| T \|$.

命題4.2. F が Hilbert 空間の時任意の Hilbert-Schmidt 作用素 T に対して TK は nuclear 作用素となり $\nu(TK) = \sigma(T)$.

命題4.3 FがBanach空間のとき、$T\in\mathcal{P}(E,F)$は次のように分解出来る。Mはコンパクトな空間

$$E \xrightarrow{T_1} C(M) \xrightarrow{K} L^2_\mu(M) \xrightarrow{T_2} F$$

証明の概略は先ずTをASとすると、前述のことからTは又 absolute 2-summable 作用素。よって弱位相を考えたU^*の中に正値Radon測度μが存在して

$$\|Tx\| \leq \pi_2(T)\left\{\int_{U^*}|\langle x,a\rangle|^2 d\mu\right\}^{1/2}$$

任意のxについてU^*上の連続関数 $\varphi_x(a)=\langle x,a\rangle$ を考えこれをT_1xとする。($M=U^*$)。次に $\varphi_x\in L^2_\mu(M)$ よりFへの対応T_2'を $T_2'\varphi_x = Tx$ と定義すると、つくり方から

$$\|T_2'\varphi_x\| = \|Tx\| \leq \pi_2(T)\left\{\int_{U^*}|\langle x,a\rangle|^2 d\mu\right\}^{1/2}$$

$$= \pi_2(T)\|\varphi_x\|_2 .$$

よって $\|T_2'\| \leq \pi_2(T)$。T_2 は T_2' の $L^2_\mu(M)$への拡大とすればよい。~~必要性~~十分性は、§2の例と同様にKは又ASになるから $T=T_2KT_1$ はASである。

上のとり方から $\|T_1\|\leq 1$, $\|T_2\|\leq\pi_2(T)\leq\pi(T)$ としてよい。

定理4.[illegible] $T\in\mathcal{P}(E,F)$, $S\in\mathcal{P}(F,G)$ の積 ST は nuclear作用素であり、$\nu(ST)\leq\pi(S)\pi(T)$.

証明. 上の命題からT, Sは次のように分解出来る.

$$T: E \xrightarrow{T_1} C(U^*) \xrightarrow{K_T} L^2_\mu(U^*) \xrightarrow{T_2} \hat{F}$$

$$S: F \xrightarrow{S_1} C(V^*) \xrightarrow{K_S} L^2_\lambda(V^*) \xrightarrow{S_2} \hat{G}$$

(ここで $\hat{F}$, $\hat{G}$ は F, G の完備化). $\tilde{S}_1$ を S_1 の $\hat{F}$ への拡大とすると

$$ST = S_2 K_S \tilde{S}_1 T_2 K_T T_1.$$

命題4.1より $K_S(\tilde{S}_1 T_2)$ はHilbert-Schmidt作用素で

$$\sigma(K_S \tilde{S}_1 T_2) \leq \|\tilde{S}_1 T_2\| \leq \pi(T)$$

命題4.2より $K_S(\tilde{S}_1 T_2)K_T$ は nuclear 作用素で

$$\nu(K_S \tilde{S}_1 T_2 K_T) \leq \sigma(K_S \tilde{S}_1 T_2) \leq \pi(S)$$

従って ST は Eから $\hat{G}$ への nuclear 作用素で

$$\nu^{\hat{G}}(ST) \leq \|S_2\| \, \nu(K_S \tilde{S}_1 T_2 K_T) \, \|T_1\| \leq \pi(S)\pi(T).$$

Gは$\hat{G}$で dense だから ST は G への写像として nuclear, 且つ

$$\nu^{G}(ST) = \nu^{\hat{G}}(ST) \leq \pi(S)\,\pi(T).$$

§4. 作用素のつくる ideal.

Hilbert 空間上では $S_p(H, H)$ ($0 < p \leq \infty$, 但し $p = \infty$ のときは l_∞ の代りに c_0 の元をとる) は有界作用素全体のつくる環の中で ideal をつくることはよく知られているが上の AS-作用素, nuclear 作用素の class をこのような形で眺めてみよう. $\mathcal{L}$ をあらゆる Banach 空間の間の有界作用素

のつくる集合とする. $\mathfrak{L}$ の部分集合 $\mathfrak{A}$ が次の条件をみたすとき, $\mathfrak{A}$ を $\mathfrak{L}$ の ideal と呼ぶことにする.

$\mathfrak{A}(E,F) = \mathfrak{L}(E,F) \cap \mathfrak{A}$ とおいて

(1) $S, T \in \mathfrak{A}(E,F)$ ならば $S+T \in \mathfrak{A}(E,F)$

(2) $T \in \mathfrak{A}(E,F)$, $S \in \mathfrak{L}(F,G)$ ならば $ST \in \mathfrak{A}(E,G)$

(3) $T \in \mathfrak{L}(E,F)$ $S \in \mathfrak{A}(F,G)$ ならば $ST \in \mathfrak{A}(E,G)$

今 $T \in \mathfrak{A}$ に対して $\alpha(T) \geqq 0$ が対応して

(a) $\alpha(T) = 0 \implies T = 0$

(b) $\alpha(S+T) \leqq \alpha(S) + \alpha(T)$

($\text{又は}\ \alpha(S+T)^p \leqq \alpha(S)^p + \alpha(T)^p \quad 0<p<1$)

(c) $T \in \mathfrak{A}(E,F)$ $S \in \mathfrak{L}(F,G)$ のとき $\alpha(ST) \leqq \|S\|\alpha(T)$

(d) $T \in \mathfrak{L}(E,F)$, $S \in \mathfrak{A}(F,G)$ のとき $\alpha(ST) \leqq \alpha(S)\|T\|$

をみたすとき $(\mathfrak{A}, \alpha)$ をノルム ideal (又は p-ノルム ideal) という. 各 $\mathfrak{A}(E,F)$ がこれにより完備なとき $\mathfrak{A}$ は完備であるという. これによれば §2,3節でのべた AS-作用素, nuclear 作用素の基本性質は次のようにのべられる.

命題 5.1. AS-作用素と Nuclear 作用素全体の集合は $\mathfrak{L}$ の中でそれぞれ $\pi(T)$ と $\nu(T)$ により完備なノルム ideal をなす.

Banach 空間の間の作用素の class として考えられるべき class は他にも多くあるが現在考えられている主要なもの

をあげると次のようになる．

$\mathbb{C}$；コンパクト作用素の class.

$\mathbb{CC}$；完全連続作用素の class. ここで $T \in \mathcal{L}(E,F)$ が完全連続とは任意の弱收束列を強收束列に写すことをいう．

$W\mathbb{C}$；weakly compact operator の class.

上記の class は通常の作用素ノルムにより，完備なノルム ideal をつくる．そしてこれらはいずれも S_∞ の class の拡張と考えられる．

$\mathbb{I}$；integral operator の class. $T \in \mathcal{L}(E,F)$ が integral とは $\rho \geq 0$ が存在して，任意の $x_1, x_2, \cdots x_n \in E$, $b_1, b_2, \cdots b_n \in F^*$ に対して

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \langle Tx_i, b_i \rangle\right| \leq \rho \sup\left\{ \left|\sum_{i=1}^{n} \langle x_i, a \rangle \langle y, b_i \rangle\right| ; \|a\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1 \right\}$$

が成立することをいう． $\iota(T) = \inf \rho$ とおくと $[\mathbb{I}, \iota]$ は完備なノルム ideal

勿論 $p=1$ でないときも absolute p-summable 作用素の class Π_p を考えれば，Π_p は $1 \leq p < \infty$ のときノルム

$$\pi_p(T) = \inf \rho$$

但し $\quad \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|Tx_i\|^p \right\}^{1/p} \leq \rho \sup\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, a \rangle|^p \right)^{1/p} ; a \in U^* \right\}$

$x_1, x_2, \cdots x_n \in E$ 又 $T \in \Pi_p(E,F)$

により完備なノルム ideal になる．これは $S_p(H,H)$ の拡張で

ある.

前節からもみられるように作用素の分解は重要な役をするがこれについて次の class がある.

$\mathbb{F}_p$; l_p - 分解可能作用素の class. $T \in \mathcal{L}(E, F)$ が l_p - 分解可能とは $T = YA$ $A \in \mathcal{L}(E, l_p)$ $Y \in \mathcal{L}(l_p, F)$ とかけることをいう. ここで $\varphi_p(T) = \inf \|A\| \|Y\|$ とおくと $[\mathbb{F}_p, \varphi_p]$ は完備なノルム ideal になる. $p \neq 2$ 且つ $1 < p < \infty$ の時この class は $S_\infty(H, H)$ の拡張であり, 而 $\mathbb{F}_\infty$ は $S_2(H, H)$ の拡張になっていることが知られている. $\mathbb{F}_2$ は Hilbert 空間では separable な値域をもつ有界作用素の全体になる.

文献

[1] A. Persson & A. Pietsch ; p-nukleare und p-integrale Abbildungen in Banachräumen, Studia Math., 33 (1969), 19-62

[2] A. Pełczyński ; A characterization of Hilbert-Schmidt operators, Studia Math., 28 (1967), 355-360

[3] A. Pietsch ; Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Raumen, Studia

Math., 28 (1967), 333-353.

[4] A. Pietsch & H. Triebel ; Interpolationstheorie für Banachideale von beschränkten linearen Operatoren, ibid. 31 (1968), 95-109.

[5] A. Pietsch ; Nukleare Lokalkonvexe Räume, Akademie-Verlag, Berlin 1969.

[6] A. Pietsch ; lp-faktorisierbare Operatoren in Banachräumen, Acta Sci. Math., 31 (1970), 117-123

[7] A. Pietsch ; Ideale von Sp-Operatoren in Banachräumen, Studia Math. 38 (1970), 59-68.