数理解析研究所講究録
第143巻 1972年 70-85

Function algebra の local property について

早大 教育 和田淳藏

§1. 序

A を compact Hausdorff space X の上の function algebra とする。A が local であるとは、$f \in C(X)$ が、すべての $x \in X$ に対して x のある近傍 $U(x)$ の上で A のある関数 g と一致するならば、$f \in A$ となることをいう。この local という性質は、解析関数の環 A には特有の性質であるが、一般のの function algebra では、どのような條件のもとにそうなるかを考える。local でない function algebra の例は Eva Kallin [4] によって始めて作られたが、その後この non-local function algebra については、Varšavskiĭ [14], Sidney [9] などの研究がある。それを §2 において論ずる。つぎに local となる function algebra について考える。その1つとして X が閉区間 I または円周 S の場合を考える。これらの function algebra については既に Wilken [12], [13], Alexander [1] などの結果があるが、最近 D. M.

Wells [15] は $X = I = M_A$ (= A の maximal ideal space) の場合 A が local であることを示し また $X = S = M_A$ の場合にも結果を出した。§3においては、それを中心として話を進める。§4においては Rickart [8] による Ω-subharmonic function に論及する。この一般化された plurisubharmonic function の理論の中において "local" という性質を論じたい。また "local" に関連して "locally approximable" の問題にもふれる。

§2. Non-local function algebra

A をその maximal ideal space M_A の上の function algebra とする。f を M_A の上で定義された複素値関数とする。f が局所的に A に属するとは、M_A の open covering $\{U_\alpha\}$ が存在して、$\forall\alpha$ で $f|U_\alpha \in A|U_\alpha$ となることである。A が local であることは結局、M_A の上で局所的に A に属するすべての関数が A に属することを意味する。また f が A により局所的に近似可能 (locally approximable) である、または A-holomorphic であるとは、M_A の open covering $\{U_\alpha\}$ が存在して、$\forall\alpha$ に対して $f|U_\alpha$ は $A|U_\alpha$ の uniform closure に属することをいう。A が holomorphically closed であるとは、すべての A-holomorphic function が A に含まれるこ

とをいう。ここでAに局所的に属する関数全体の uniform closure を $L(A)$ で表わし、A-holomorphic function 全体の uniform closure を $H(A)$ で表わす。明らかに $L(A)$, $H(A)$ は共に M_A の上の function algebra で、おのおのの maximal ideal space を $M_{L(A)}$, $M_{H(A)}$ で表わせば、$M_{L(A)} = M_{H(A)} = M_A$ (Stolzenberg [10], Rickart [5])。いま $L^0(A) = H^0(A) = A$, また $n \geqq 1$ に対しては、$L^n(A) = L(L^{n-1}(A))$, $H^n(A) = H(H^{n-1}(A))$, そして $L^\infty(A)$ $(H^\infty(A))$ = uniform closure $(\bigcup_{0 \leqq n < \infty} L^n(A))$ (uniform closure $(\bigcup_{0 \leqq n < \infty} H^n(A))$) とおけば、function algebra $L^\infty(A)$, $H^\infty(A)$ の maximal ideal space は共に M_A に等しい。つぎにAが order s の non-local であるとは、$0 \leqq n < s$ なる n に対しては $L^n(A) \neq L^{n+1}(A)$ で、かつ $L^s(A) = L^{s+1}(A)$ となることをいう。またAが order ∞ の non-local とは、すべての n に対して $L^n(A) \neq L^{n+1}(A)$ で、かつ $L^\infty(A)$ が local のときにいう。同様にAが order s の non-holomorphically closed であるとは、$H^n(A) \neq H^{n+1}(A)$ $(0 \leqq n < s)$ かつ、$H^s(A) = H^{s+1}(A)$。またAが order ∞ の non-holomorphically closed であるとは、すべての n で $H^n(A) \neq H^{n+1}(A)$ でかつ、$H^\infty(A)$ は holomorphically closed のときをいう。Aが order 0 の non-local (non-holomorphically closed) とはAが local (holomorphically closed）となることとする。

定理 2.1. s を正整数または ∞ とする。そのとき order s の non-local (antisymmetric) function algebra が存在する。

定理 2.2. s を正整数または ∞ とする。そのとき order s の non-holomorphically closed な separable (antisymmetric) function algebra が存在する。

定理 2.1 でまず order 1 の場合に証明して見る。複素平面 $\mathbb{C}$ 上で $R = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ とおき、$B(R)$ を annulus algebra とする、すなわち $B(R) = \{f \in C(\overline{R}) : f$ は R で holomorphic $\}$。つぎに $\Delta = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ とし、$B(\Delta)$ を disk algebra とする。radial set とは、閉区間 $\{te^{i\varphi} : 1+\delta \leqq t \leqq 2\}$ $(0 < \delta < 1)$ の有限個（零個を含めて）の和集合をいう。また $\partial_1 R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $\partial_2 R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ とおく。いま radial set $L = \bigcup_{i=1}^{m} I_i$ $(m \geqq 0)$, $\delta_1, \cdots, \delta_m$ $(0 < \delta_i < 1)$ が与えられたとする。ここで $\Delta_j = \{w \in \mathbb{C} : |w| < \delta_j\}$ $(1 \leqq j \leqq m)$ とおき $\mathbb{C}^2$ の部分集合 X を

$$X = (\overline{R} \times \{0\}) \cup (\partial R \times \overline{\Delta}) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} (I_j \times \overline{\Delta}_j)\right)$$

と定義する。そして A をつぎをみたす $f \in C(X)$ の集合とする：$z \to f(z, 0)$ は $B(R)$ に属する。$w \to f(z, w)$ はすべ

ての $z \in \partial R$ に対して $B(\Delta)$ に属する。$w \to f(z,w)$ はすべての $z \in I_j$ $(1 \leqq j \leqq m)$ に対して Δ_j の上で holomorphic かつ $z \to \frac{\partial f}{\partial w}(z,0)$ は $\partial R \cup L$ で $B(R)$ に属す。ここで $L(A)$ は local となることがわかる。また A は order 1 の non-holomorphically closed algebra であることがわかる。実際に $L(A) = \{ f \in C(X) :$ $z \to f(z,0)$ は $B(R)$ に属し、$w \to f(z,w)$ は $\forall z \in \partial R$ で $B(\Delta)$ に属し、かつ $w \to f(z,w)$ は $\forall z \in I_j$ $(1 \leqq j \leqq m)$ で holomorphic $\}$ となる。

つぎに $2 \leqq s < \infty$ の場合を考える。k を負でない整数とし、N_k を ordered k-tuples $\bar{n} = (n_1, \cdots, n_k)$ (n_i: 整数, $\geqq 2$) の全体とする。$0 \leqq k \leqq \infty$ に対して $\tilde{N}_k = \bigcup_{0 \leqq j \leqq k} N_j$ とおく。(N_0 の元は empty sequence $\bar{\Phi}$ のみ)。$0 \leqq k < \infty$ に対して、$p_k : \tilde{N}_\infty \sim \tilde{N}_k \to N_k$ を $p_k(n_1, \cdots, n_k, \cdots, n_j) = (n_1, \cdots n_k)$ で与える。つぎに $\tau : \tilde{N}_\infty \to \mathbb{R}$ を $\tau(\bar{n}) = 2^{-n_1} + 2^{-n_1-n_2} + \cdots + 2^{-n_1-n_2-\cdots-n_k}$ とおく。$\mathbb{C}^2$ の中の集合 $X_{\bar{n}}$ をつぎのように定義する ($|\bar{n}| = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$):

$$X_{\bar{n}} = (\bar{R} \times \{0\}) \cup (\partial R \times \bar{\Delta}) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{|\bar{n}|} (I_{\bar{n},j} \times \bar{\Delta}_{\bar{n},j}) \right)$$

ここで $I_{\bar{n},j} = \{ t\beta_j : 1 + \delta(\bar{n},j) \leqq t \leqq 2 \}$, $\Delta_{\bar{n},j} = \{ w \in \mathbb{C} : |w| < \rho(\bar{n},j) \}$ で $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ は $\partial\Delta$ の異なる点の列. $\delta(\bar{\Phi}) = 3/4$, $\delta(\bar{n}) = (n_1 \cdots n_k)^{-1}$ $(|\bar{n}| = k > 1)$ かつ $\delta(\bar{n},j) = \delta(p_j(\bar{n}))$, $p_j(\bar{n}) = \exp(-n_1 \cdots n_j)$, また $\delta(\bar{n},j) \to 0$ なら $\rho(\bar{n},j) \to 0$ とする。

いま $X_{\bar{n}}$ の上の function algebra $A_{\bar{n}}$ をつぎのように定義する:

$A_{\tilde{n}} = \{ f \in C(X_{\tilde{n}})$: $z \to f(z, 0)$ は $B(R)$ に属する。$w \to f(z, w)$ は $\forall z \in \partial R$ に対して $B(\Delta)$ に属する。$w \to f(z, w)$ は $\forall z \in I_{\tilde{n}, j}$ $(1 \leqq j \leqq |\tilde{n}|)$ で holomorphic、かつ $z \to \frac{\partial f}{\partial w}(z, 0)$ は $\partial R \cup L_{\tilde{n}}$ の上で $B(R)$ に属する $\}$。

いま $X = \bigcup_{\tilde{n} \in \tilde{N}_s} (X_{\tilde{n}} \times \{\tau(\tilde{n})\}) \subset \mathbb{C}^3$ とおき

$$A = \{ f \in C(X) : f|X_{\tilde{n}} \in A_{\tilde{n}} \quad (\forall \tilde{n} \in \tilde{N}_s) \}$$

とおいたとき、A が order s の non-local function algebra となる。これを antisymmetric algebra にするには、更に多少の技巧を要する。これを antisymmetric algebra にするには 更に多少の技巧を要する。

§3　I (または S) の上の function algebra

閉区間および円周をおのおの I, S とおく。Wilken [12] はつぎを証明した。

<u>定理 3.1.</u> A を I $(= M_A)$ または S $(= M_A)$ の上の function algebra とする。そのとき A は M_A の上で approximately normal である。すなわち F_1, F_2 を共通点のない X の 2 つの閉集合とすれば、そのとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して $f \in A$ が存在して、$|f(x)| < \varepsilon$ $(x \in F_1)$, $|1 - f(x)| < \varepsilon$ $(x \in F_2)$。

<u>定理 3.2.</u> A を I $(= M_A)$ または S $(= M_A)$ の上の function algebra とする。いま $f \in C(X)$ を $f|U_i = g_i|U_i$ $(i = 1, 2)$ $(g_1, g_2 \in A)$, $U_1 \cup U_2 = X$ とする。そのとき $f \in A$ となる。

この結果をより精密にし、$I\ (=M_A)$ の上の function algebra はすべて local であることを示したのが、つぎの Wells の結果である。

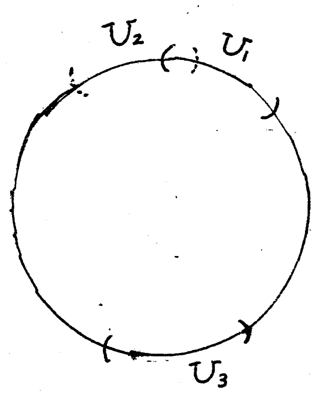
<u>定理 3.3.</u> (a). A を $I\ (=M_A)$ の上の function algebra とする。そのとき A は local となる。

(b). A を $S\ (=M_A)$ の上の function algebra とする。そのとき A は local かまたは antisymmetric となる。

略証. まずつぎのことが成立する: $f \in C(I)$ とする。U_1, U_2 を I の中の relatively open interval とし、$U_1 \cap U_2 \neq \phi$ とする。ここで $U_1 = (a, b)$, $U_2 = (c, d)$, $a < c$, $b < d$ と仮定する。いま任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$g_1, g_2 \in A$ が ε に independent なある K に対して $\|g_1\|, \|g_2\| \leqq K$ で、かつ $|f - g_1| < \varepsilon$ on U_1, $|f - g_2| < \varepsilon$ on U_2 のように存在したとする. そのときすべての $\delta > 0$ に対して、$g \in A$ が存在して $\|g\| < K + \delta$ でかつ $|f - g| < \delta$ on $U_1 \cup U_2$ となる. この証明には定理 3.1 が用いられる。さて A が local であることを証明するためには、$f \in C(I)$ で I のある finite open covering $\{U_1, \cdots, U_m\}$ で $f|U_i \in A|U_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ と仮定したとき、$f \in A$ となることを示せばよい。以下その証明: covering $\{U_1, U_2, \cdots U_m\}$ の refinement $\{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$ (もしその必要があれば)

を適当にとり、おのおのの V_i は I の relatively open interval で $V_1=[0,q_1]$, $V_n=(p_n,1]$, $V_i=(p_i,q_i)$ $(2\leqq i\leqq n-1)$, $0<p_2<\cdots<p_n$, $q_1<q_2<\cdots<q_{n-1}<1$ とることができる。ここで $v_i\in A$ を $v_i|V_i=f|V_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ ととる。
さてここで上のことを用いる：$U_1=V_1$, $U_2=V_2$, $g_1=v_1$, $g_2=v_2$ とおいたとき、すべての $\delta>0$ に対して $g^{(1)}\in A$ が存在して $\|g^{(1)}\|<\max(\|v_1\|,\|v_2\|)+\delta$ で $|g^{(1)}-f|<\delta$ on $V_1\cup V_2$ となる。つぎに $U_1=V_1\cup V_2$, $U_2=V_3$, $g_1=g^{(1)}$, $g_2=v_3$ とおけば $g^{(2)}\in A$ が存在して $\|g^{(2)}\|<\max(a_2,\|v_3\|)+\delta$ ($a_2=\max(\|v_1\|,\|v_2\|)+1$)、かつ $|g^{(2)}-f|<\delta$ on $V_1\cup V_2\cup V_3$。これを続ければ $V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_n=I$ となり、ここでは、すべての $\delta>0$ に対して $g^{(n-1)}\in A$ が存在して $\|g^{(n-1)}-f\|<\delta$。ゆえに $f\in A$。

(b). まずつぎのことが成立する：$f\in C(S)$ で、U_1, U_2 を S の中の overlap した open interval とする。U_3 を open interval で $\overline{U_1\cup U_2}\cap\overline{U_3}=\phi$ とする。いまある $K>0$ が存在して、すべての $\varepsilon>0$ に対して、$g_1, g_2\in A$ が $|g_1-f|<\varepsilon$ on U_1, $|g_2-f|<\varepsilon$ on U_2 かつ $|g_1|, |g_2|\leqq K$ on $S\sim U_3$ のように存在すると仮定する。そのときすべての $\delta>0$



に対して $g \in A$ がつぎをみたす：$|g-f|<\delta$ on $U_1 \cup U_2$, $|g|<K+\delta$ on $S \sim U_3$. ここで A が local となるか anti-symmetric となることを証明する。いま A が antisymmetric でないとする。そのとき A が local となることをいえばよい。すなわち $f \in C(S)$ で S のある open covering $\mathfrak{U}=\{U_1, U_2, \cdots, U_n\}$ に対して $f|U_i = g_i|U_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ $(g_i \in A)$ ならば、$f \in A$ を示せばよい。以下その証明：A のすべての maximal antisymmetric set P に対して、$f|P \in A|P$ となればよいから、すべての P で $f|P \in (A|P)^-$ をいえばよい（なんとなれば $A|P$ は closed）。いま P を任意の maximal antisymmetric set（勿論 $P \neq S$）とする。必要あれば $\mathfrak{U}$ の refinement $\mathcal{V}=\{V_1, V_2, \cdots, V_m\}$ をとり、V_i は open interval ですべての異なる i, j, k に対して $V_i \cap V_j \cap V_k = \phi$、かつ $V_i \sim \bigcup_{j \neq i} V_j$ はすべての i で non-empty な interior をもち、$K \cap V_n = \phi$ とする。また $S \sim (\bigcup_{i=1}^{n-1} V_i)^- \supset W^-$ とおく。そのときは当然 $V_i^- \cap W^- = \phi$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ となり、上に述べたことから、すべての $\varepsilon>0$ に対して $f_\varepsilon \in A$ がつぎのように存在する：$|f_\varepsilon - f| < \varepsilon$ on P そして $|f_\varepsilon| < \max_{1 \leq i \leq n}(|g_i|+1)$ on $S \sim W$ (g_i は $f|V_i = g_i|V_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ $(g_i \in A)$ となるもの)。これは $f \in (A|P)^-$ となることを示す。

(注意) connected space X 上の analytic algebra が local となることは容易にわかるが、もっと一般な function algebra が local となる条件は未だ決まっていない。$X = I$ (= 閉区間) のときでも定理 3.3 (a) のように $I = M_A$ となる条件が要る

§4. $\mathfrak{A}$ - subharmonic function

Σ を Hausdorff space とし、$\mathfrak{A}$ を Σ の上の複素数値連続関数の algebra とする。ここで $\mathfrak{A}$ は定数関数を含み、Σ の位相を determine すると仮定する。すなわち Σ の位相が、$\mathfrak{A}$ に含まれるすべての関数が連続となるような最も弱い位相に等しいとする。このような Σ と $\mathfrak{A}$ の組合せを system $[\Sigma, \mathfrak{A}]$ と呼ぶ。ここで system $[\Sigma, \mathfrak{A}]$ は natural であると仮定する。すなわち $\mathfrak{A}$ の上の任意の non-trivial な複素連続準同型写像は(*)、Σ のある点における evaluation で与えられる。natural system の最も身近な例は $[\mathbb{C}^n, \mathfrak{P}]$ である。ここで $\mathfrak{P}$ は n complex variable の polynomial 全体の algebra を表わす。G を $\mathbb{C}^n$ の開集合としたとき、G の上で定義された関数(値は $[-\infty, \infty)$ にとる)が G の上で plurisubharmonic であるとは、f は上に semi-continuous で、かつ D (unit open disk) から G の中への任意の holomorphic map η に対して $f\circ\eta$ が D で subharmonic なることをいう (cf. [3])。$[\Sigma, \mathfrak{A}]$ の場合にも上と類似な定義によって "plurisubharmonic" function を定義したい。しかし D から Σ への non-constant holomorphic map が存在しない例(**) (cf. Stolzenberg [10]) があるゆえ、この場合には、すべての上に semi-continuous な関数が "plurisubharmonic" となり、このような定義は不

(*) $\mathfrak{A}$ には compact-open topology が入れてある。
(**) この場合、Σ のどの点を通る analytic structure も存在しない。

適当なことがわかる。ゆえにもう少し精密な定義を要する。以下、一般の"plurisubharmonic function"、すなわち Ω-subharmonic function を定義することから始める。さて、$\mathcal{U}$ を Σ の部分集合の上に定義され、値を $[-\infty, \infty)$ にとり、かつ上に semi-continuous (u. s. c) となる関数の全体とする。つぎに $\mathcal{L}_\Omega = \{f : f = n^{-1}\log|a|,\ n : \text{正整数},\ a \in \Omega\}$ とおけば、$\mathcal{L}_\Omega \subset \mathcal{U}$ となる。$\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ に対して、$\mathcal{F}$ に属する関数の non-increasing sequence の locally に point-wise の limit となる $\mathcal{U}$ の関数全体の集合を $\mathcal{F}^{\downarrow}$ と書き、また $\mathcal{F}$ の任意の部分族の locally に supremum となっている $\mathcal{U}$ の関数全体の集合を $\mathcal{F}^{s}$ で表わす。ここで $\mathcal{F}^{\downarrow s} = \mathcal{F}^{s\downarrow}$ となる。$\downarrow s = s\downarrow = *$ とおくとき、$\mathcal{F}^* = \mathcal{F}$ となる $\mathcal{F}$ を $*$-closed という。$\mathcal{L}_\Omega$ を含む $*$-closed な集合の共通集合を $\mathfrak{S}_\Omega$ で表わし、それに属する関数を Ω-subharmonic function ということにする。$f, -f$ が共に Ω-subharmonic であるとき、f を Ω-harmonic function という。Ω-harmonic function 全体を $\mathcal{H}_\Omega$ で表わす。ここでつぎのことがわかる：ある ordinal μ が存在し、$\forall \nu \leqq \mu$ に対して $\mathfrak{S}_\nu \subset \mathcal{U}$ がつぎをみたす。(i) $\mathfrak{S}_0 = \mathcal{L}_\Omega$, $\mathfrak{S}_\mu = \mathfrak{S}_\Omega$ そして $\mathfrak{S}_\alpha \subsetneqq \mathfrak{S}_\beta$ $(0 \leqq \alpha < \beta \leqq \mu)$ (ii) もし $\nu \leqq \mu$ なら $\mathfrak{S}_\nu = (\bigcup_{\alpha<\nu} \mathfrak{S}_\alpha)^*$。

つぎに $\mathfrak{S}_\Omega$ の性質をいくつか述べる。

(I). $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}}$ は local uniform limit に対して closed, すなわち g を $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}}$ に含まれる関数によって locally approximable であるとすれば、g はまた $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}}$ に含まれる。

(II) $f \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}}$, $f \geqq 0$ なら $f^t \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}}$ $(t \geqq 1)$。

(III) $f \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}}$ なら $e^f \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}}$。

(IV) h を $\mathfrak{A}$- holomorphic function とすれば、$\log|h|$, $|h|$ は $\mathfrak{A}$- subharmonic function。

(V) h を $\mathfrak{A}$ - holomorphic function で、$h \neq 0$ なら $\log|h|$ は $\mathfrak{A}$ - harmonic となる。

(VI) h を $\mathfrak{A}$ - holomorphic function で $h = u + iv$ (u, v : real function) とするとき、u, v は $\mathfrak{A}$- harmonic.

(VII) η を U (unit open disk) から Σ への holomorphic map で、f を $\eta(U)$ の上の $\mathfrak{A}$ - subharmonic function とすれば、$f \circ \eta$ は U の上の普通の意味の subharmonic function である。

(VIII) $[\mathbb{C}^n, \mathcal{P}]$ においては、$\mathbb{C}^n$ の開集合の上で定義された関数が plurisubharmonic となるための必十条件は、それが $\mathcal{P}$ - subharmonic となることである。

さて Rossi の local maximum modulus principle はつぎのようである ([6]) : Ω を Σ の $\mathfrak{A}$- convex subset とし、U を $\Omega \sim \partial_{\mathfrak{A}}\Omega$ の relatively open subset とする。そのとき

$\forall a \in \mathfrak{A}$ に対して、$\max_{x\in bd_{\Omega} U}|a(x)| = \max_{x\in \overline{U}}|a(x)|$ となる。所で Σ の部分集合 Δ が essentially open であるとは、Δ が Σ のある closed subset の relatively open subset となることをいう（たとえば $\overbrace{\Omega \sim \partial_{\mathfrak{A}}\Omega}^{\text{前の}\Omega\text{で}}$ ~~の open subset~~ ）。いま Δ を essentially open set で $\overline{\Delta}$ を compact とする。$\mathfrak{F} \subset \mathfrak{A}$ としたとき、$\mathfrak{F}$ が Δ において local maximum principle をみたす（そしてそのとき Δ を $\mathfrak{F}$-local という）とは、Δ の relatively open U, $f \in \mathfrak{A}$ ($\overline{U} \subset$ domain of f), $f|U \in \mathfrak{F}$ に対して $\max_{x\in bd_{\Delta} U} f(x) = \max_{x\in \overline{U}} f(x)$ となることをいう。

(IX) essentially open set Δ ($\overline{\Delta}$: compact) が $\mathfrak{A}$-local なら $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}$-local となる。

(X) U を Δ の relatively open subset とする。h を $\overline{U}$ で連続で U で $\mathfrak{A}$-harmonic, g は $\overline{U}$ で u.s.c で U で $\mathfrak{A}$-subharmonic とする。もし $g \leqq h$ on $bd_{\Delta} U$ なら $g \leqq h$ on $\overline{U}$ となる。ゆえに g, h 共に U で $\mathfrak{A}$-harmonic で $g = h$ on $bd_{\Delta} U$ なら $g = h$ on $\overline{U}$.

G を Σ の開集合とし、G の上で定義された連続な $\mathfrak{A}$-subharmonic function 全体の集合を $C\mathfrak{S}(G)$ で表わす。K を G の中のコンパクト集合としたとき $\widetilde{K} = \{x \in G : f(x) \leqq \max_{y\in K} f(y),\ f \in C\mathfrak{S}(G)\}$ とおいたとき、$\widetilde{K}$ を $\mathfrak{A}$-sh. hull of K という。G の任意のコンパクト集合 K で $\widetilde{K}$ がまたコンパクトとなれば、G を

$\mathfrak{R}$-sh. convex という。$\mathfrak{R}$-sh. convex は多変数関数論の p-convexity (cf. [3]) の一般化になっている。また holomorphic convex の一般化となっている $\mathfrak{R}$-holomorphic convexity も定義されるわけであるが、$\mathfrak{R}$-holomorphic convex set, $\mathfrak{R}$-sh. convex set に関する定理も数多くある。紙面が限られているため、つぎの Bremerman の定理 (cf. [2]) の一般化だけにとどめる。

(XI) G を Σ の開集合で $\mathfrak{R}$-holomorphically convex subset とする。S, T を G の subset で $S \cup T \subset\subset G$ としたとき、もし $\forall h \in \mathcal{O}_G$ で $\max_{x \in \overline{T}} |h(x)| = \max_{x \in \overline{S \cup T}} |h(x)|$ ならば、$\forall f \in \mathfrak{F}(G)$ で $\max_{x \in \overline{T}} f(x) = \max_{x \in \overline{S \cup T}} f(x)$ となる。ここで $\mathcal{O}_G$ は G の上のすべての $\mathfrak{R}$-holomorphic function の集合を表わす。

参考文献

[1] H. Alexander : Uniform algebras on curves, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969) 1269-1272.

[2] H. Bremerman : On the conjecture of the equivalence of the plurisubharmonic functions and the Hartogs functions, Math. Ann. 131 (1956), 76-86.

[3] R. C. Gunning and H. Rossi : Analytic Functions of Several Complex Variables, Prentice-Hall, 1965.

[4] Eva Kallin : A non-local function algebra, Proc. Nat. Acad. Sci. 49 (1963), 821-824.

[5] C. E. Rickart : The maximal ideal space of functions locally approximable in a function algebra, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 1320-1326.

[6] ———— : Analytic phenomena in general function algebras, Pacific J. Math. 18 (1966), 361-377.

[7] ———— : Holomorphic convexity in general function algebras, Canad. J. Math. 20 (1968), 272-290.

[8] ———— : Plurisubharmonic Functions and Convexity Properties for General Function Algebras, Yale Univ. Lecture Note (1971).

[9] S. J. Sidney : High-Order Non-Local Uniform Algebras, Yale Univ. Lecture Note (1970).

[10] G. Stolzenberg : A hull with no analytic structure, J. Math. and Mech. 12 (1963), 103-112.

[11] ———— : The maximal ideal space of functions locally in a function algebra, Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), 342-345.

[12] D. R. Wilken : Approximate normality and function algebras

on the interval and the circle, Proc. Internat. Sympos on Function Algebras, Tulane Univ. (Scott-Foresman 1966)

[13] ―――――― : A note on strongly regular function algebras, Can. J. Math. 21 (1969) 912-914.

[14] A. D. Varšavskiĭ : A function algebra of the second degree of nonlocalness, Uspehi Mat. Nauk 24 (1969), no. 2 (146), 223-224.

[15] D. H. Wells : Atlantic City での Annual meeting における講演 (1971).