数理解析研究所講究録
第 144 巻 1972 年 48-59

Frobenius map によるベクトルバンドルのコホモロジークラスの挙動について

京大 理　丹後弘司

§1 序

ここでは，考える Variety（又は Curve）X はすべて non-singular, irreducible, projective であって，代数的閉体 k 上定義されているとする。又定義体 k の標数 p は正とする。この時，X 上の ample line bundle L に対して，Frobenius map

$$F^*(i, \check{L});\ H^i(X, \check{L}) \longrightarrow H^i(X, \check{L}^{(p)})$$

の挙動を調べる事は，次の意味で興味のある事です。

(I) すべての ample line bundle L とすべての $j \leqq \dim X - 1$ に対して Frobenius map $F^*(j, \check{L})$ が injective であれば，X において小平の Vanishing Theorem が成立する。すなわち任意の ample line bundle L と，任意 $j \leqq \dim X - 1$ に対して，$H^j(X, \check{L}) = 0$ 。

(II) " Curve Xと，その上の ample line bundle Lが存在して Frobenius map $F^*(1, L^\vee)$ が injective でない。"とすれば，これは X上の vector bundle E でそのすべての quotient bundle の degree が正であるにもかかわらず，ample でないものの存在する事を示している。

ここでは，Xに対して小平の Vanishing Theorem が成立する為の必要十分条件と十分条件を証明し，(II)の" "内をみたすXとLの存在を示します。

§2 Cartier Operator

$F ; X \longrightarrow X$ を Frobenius map とする。Ω^i_X をX上の regular differential 1-forms の germs のなす sheaf とする。map $d ; \Omega^i_X \longrightarrow \Omega^{i+1}_X$ により induce される $\mathcal{O}_X$-Module の morphism

$$F_* d ; F_*\Omega^i_X \longrightarrow F_*\Omega^{i+1}_X$$

の Kernel 及び Image を各々 $\mathcal{Z}^i_X$, $\mathcal{B}^{i+1}_X$ でもって表わす。(注意，よく知られた exact sequence $0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{F} \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega^1_X$ よりすぐ分る様に，$\mathcal{Z}^0_X = \mathcal{O}_X$ である。) $\mathcal{Z}^i_X$ に関して次の Proposition が成立する。

Proposition 1. 任意のXの点 x に対して，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ を

Xのxにおける local parameter とする時,

$$Z^i_{X,x} = \mathcal{B}^i_{X,x} \oplus \Big(\bigoplus_{(j)} \mathcal{O}^p_{X,x} (u_{j_1} u_{j_2} \cdots u_{j_i})^{p-1} du_{j_1} \wedge du_{j_2} \wedge \cdots \wedge du_{j_i} \Big)$$

となる。ここで $\mathcal{O}^p_{X,x} = \{ f^p ; f \in \mathcal{O}_{X,x} \}$ であり, $\mathcal{O}_{X,x}$ の元 f の $Z^i_{X,x}$ への作用は f^p を掛けて作用する。

Cartier operator $C ; Z^i_X \quad \Omega^i_X$ が次の Proposition を満足する様に定義される。

Proposition 2. 任意の $\omega, \omega_1, \omega_2 \in Z^i_{X,x}$ と, 任意の $f, f_1, f_2, \cdots, f_i \in \mathcal{O}_{X,x}$ に対して, 次の(i)〜(iv)が成立する。

(i) $C(\omega_1 + \omega_2) = C(\omega_1) + C(\omega_2)$

(ii) $C(f^p \omega) = f\, C(\omega)$

(iii) $C(\omega) = 0$ もし $\omega \in \mathcal{B}^i_{X,x}$

(iv) $C((f_1 f_2 \cdots f_i)^{p-1} df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_i) = df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_i$

証明。 C を(i),(ii),(iii)及び各 $(j) = (j_1, \cdots, j_i)$ に対応する組 $(u_{j_1}, u_{j_2}, \cdots, u_{j_i})$ に対して, (iv)が成立する様に定義する。これで C が定義できる事は Proposition 1より明らかである。(iv)を証明するには, 組 $(f_{1,1}, f_2, \cdots, f_i)$ と $(f_{1,2}, f_2, \cdots, f_i)$ に対して(iv)が成立する時, 組 $(f^p f_{1,1}, f_2, \cdots, f_i)$, $(f_{1,1} f_{1,2}, f_2, \cdots, f_i)$ 及び $(f_{1,1} + f_{1,2}, f_2, f_3, \cdots, f_i)$ に対して(iv)が成立している事

を証明すればよい。これは簡単な計算である。

Cartier operator についての詳細は [2], [3] 又は [4] を参照されたい。

Proposition 3. 次の sequence は $\mathcal{O}_X$-Module の exact sequence である。

(i) $0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow F_*\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{B}_X^1 \longrightarrow 0$

(ii) $0 \longrightarrow \mathcal{Z}_X^i \longrightarrow F_*\Omega_X^i \longrightarrow \mathcal{B}_X^{i+1} \longrightarrow 0$

(iii) $0 \longrightarrow \mathcal{B}_X^i \longrightarrow \mathcal{Z}_X^i \xrightarrow{C} \Omega_X^i \longrightarrow 0$

証明。 (i) 及び (ii) は定義より，又 (iii) は Proposition 2 より直に出てくる。

§3. Vanishing Theorem.

$i \leqq \dim X - 1$ とする。任意の $j \leqq i$ と，任意の ample line bundle L に対して $H^j(X, L^\vee) = 0$ が成立する時，X に $K(i)$ が成立していると言う事にする。

定理 4。$i \leqq \dim X - 1$ とする時，次の 2 つは同値である。

(i) 任意の $j \leqq i-1$ と任意の ample line bundle L に対して

$$H^j(X, \mathcal{B}_X^1 \otimes L^\vee) = 0$$

(ii) X に K(i) が成立する。

証明. Proposition 3 の sequence (i) に $L^\vee$ を tensor して次の exact sequence を得る。

(イ)
$$\begin{tikzcd}
H^{j-1}(X, F_*\mathcal{O}_X\otimes L^\vee) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & H^{j-1}(X, B^1_X\otimes L^\vee) \arrow[r] & H^j(X, L^\vee) \arrow[r] \arrow[dr, "F^*(j, L^\vee)"] & H^j(X, F_*\mathcal{O}_X\otimes L^\vee) \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
H^{j-1}(X, L^{\vee(p)}) & & & H^j(X, L^{\vee(p)})
\end{tikzcd}$$

(i) ⇒ (ii)。(イ)より $F^*(j, L^\vee)$ は injective, 従ってすべての m に対して $F^*(j, L^{\vee(p^{m-1})})\circ F^*(j, L^{\vee(p^{m-2})})\circ\cdots\circ F^*(j, L^\vee)$;

$H^j(X, L^\vee)\longrightarrow H^j(X, L^{\vee(p^m)})$ は injective。$j\leqq i\leqq \dim X-1$ であり L は ample line bundle であるから，m を十分大きくとれば $H^j(X, L^{\vee(p^m)})=0$。よって $H^j(X, L^\vee)=0$。

(ii) ⇒ (i) は (イ)より明らか。($L^{(p)}$ も ample line bundle になるから)

$i\leqq \dim X-1$ とする。$l+j\leqq i$，$j>0$ なるすべての j, l とすべての ample line bundle L に対して $H^l(X, \Omega^j_X\otimes L^\vee)=0$ である時，X に $N(i)$ が成立すると言う事にして，又同じ条件をみたす，すべての j, l, L に対して $H^l(X, Z^j_X\otimes L^\vee)=0$ $H^l(X, B^j_X\otimes L^\vee)=0$ が成立する時，X に $n(i)$ が成立すると言う事にする。

定理5。 $i \leqq \dim X - 1$ とする。Xにおいて $N(i)$ が成立するならば, $n(i)$ も成立する。従ってその時 $K(i)$ も成立する。

証明. Proposition 3 より次の exact sequence が得られる。

(ロ) $0 \longrightarrow Z_X^j \otimes L^\vee \longrightarrow F_*\Omega_X^j \otimes L^\vee \longrightarrow B_X^{j+1} \otimes L^\vee \longrightarrow 0$

(イ) $0 \longrightarrow B_X^j \otimes L^\vee \longrightarrow Z_X^j \otimes L^\vee \longrightarrow \Omega_X^j \otimes L^\vee \longrightarrow 0$

i についての induction で証明する。

$i = 1$ の時. (ロ)より $0 \longrightarrow H^0(X, Z_X^1 \otimes L^\vee) \longrightarrow H^0(X, F_*\Omega_X^1 \otimes L^\vee)$ $= H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L^{\vee(p)}) = 0$ よって $H^0(X, Z_X^1 \otimes L^\vee) = 0$。同様に (イ)より $H^0(X, B_X^1 \otimes L^\vee) = 0$。よって $N(1) \Rightarrow n(1)$ は言えた。

$i-1$ まで正しいとする。$N(i)$ が成立すれば $N(i-1)$ も成立するから, induction の仮定より, $n(i-1)$ が成立する。従って $H^l(X, Z^{i-l} \otimes L^\vee) = H^l(X, B^{i-l} \otimes L^\vee) = 0$ $(0 \leqq l \leqq i-1)$ を証明すればよい。これは l の induction で (ロ), (イ) を使えば証明できる。

又 $n(i)$ が成立すれば特に定理4の(i)が成立するから, $K(i)$ が成立する。

Corollary 6. Y を Variety, E を Y 上の rank $r \geqq 2$ の vector bundle とする。$X = \mathbb{P}(E)$ とすると, X には $K(1)$ が成立する。

証明。$N(1)$ が成立する事をいう。$H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L^\vee) \neq 0$ なる

$$\begin{array}{ccc} X = \mathbb{P}(E) & \supset & \pi^{-1}(y) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ Y & \ni & y \end{array}$$

ample line bundle が存在したと仮定する。この時 general な fibre $\pi^{-1}(y) = Z \overset{\iota}{\hookrightarrow} X$ に対して $H^0(Z, \iota^*(\Omega^1_X \otimes L^\vee)) \neq 0$ となる。ところで $Z = \mathbb{P}^{r-1}$, $N_{Z/X} \approx \overset{m}{\bigoplus} \mathcal{O}_Z$ (normal bundle) であるから，次の exact sequence を得る。

$$0 \longrightarrow \overset{m}{\bigoplus} \iota^* L^\vee \longrightarrow \iota^*(\Omega^1_X \otimes L^\vee) \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^{r-1}} \otimes \iota^* L^\vee \longrightarrow 0$$

明らかに $H^0(Z, \overset{m}{\bigoplus} \iota^* L^\vee) = H^0(Z, \Omega^1_{\mathbb{P}^{r-1}} \otimes \iota^* L^\vee) = 0$，従って $H^0(Z, \iota^*(\Omega^1_X \otimes L^\vee)) = 0$ これは矛盾。よって $N(1)$ が成立し $K(1)$ も成立する。

Corollary 7. $X = Y_1 \times Y_2$, $\dim Y_1 \cdot \dim Y_2 \geq 1$ の時，X に $N(1)$ が成立する。従って $K(1)$ も成立する。

証明。$N(1)$ が成立しないと仮定する。この時 ample line bundle L で $H^0(X, \Omega^1_X \otimes L^\vee) \neq 0$ となるものが存在する。

$$\begin{array}{ccc} & X = Y_1 \times Y_2 & \\ \swarrow \pi_1 & & \searrow \pi_2 \\ Y_1 & & Y_2 \end{array}$$

$\pi_i : X \longrightarrow Y_i$ を自然な projection とする

$H^0(X, \Omega^1_X \otimes L^\vee) = H^0(X, \pi_1^* \Omega^1_{Y_1} \otimes L^\vee) \oplus H^0(X, \pi_2^* \Omega^1_{Y_2} \otimes L^\vee)$

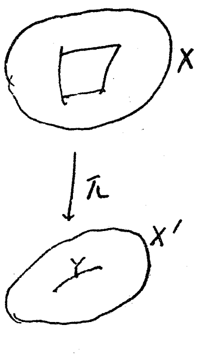
よって $H^0(X, \pi_1^* \Omega^1_{Y_1} \otimes L^\vee) \neq 0$ としてよい。

十分 general な点 $y_1 \in Y_1$ をとって $Z = \pi_1^{-1}(y) \overset{\iota}{\hookrightarrow} X$ とすれば $0 \neq H^0(Z, \iota^* \pi_1^* \Omega^1_{Y_1} \otimes \iota^* L^\vee) = H^0(Z, \iota^* L^\vee) = 0$。これは矛盾。よって X には $N(1)$ が成立する。

Corollary 8. X' を variety Y を X' の subvariety で codimension が2以上のものとする。X を X' の Y を center とする blowing up とする。この時，X' に $N(1)$（又は $K(1)$）が成立すれば X においても $N(1)$（又は $K(1)$）が成立する。

証明。X' 上の sheaf $\mathcal{F}$ と $X'-Y$ 上の元 x' が指定された時 X' 上の curve C' で次の条件をみたすものが存在する。
$C' \ni x'$, $C' \cap Y = \phi$, 且つ $H^0(X', \mathcal{F}) = H^0(C', \mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_{C'})$。
C は十分 ample な divisor の cutting で作れる。

今 X に $N(1)$ が成立していないと仮定する。従って ample line bundle L で $H^0(X, \Omega^1_X\otimes L^\vee) \neq 0$ となる。



X の十分一般な点 $x\in X$ をとれば $x \notin \pi^{-1}Y$, すべての x を通る curve $C \xhookrightarrow{i} X$ に対して $H^0(C, i^*(\Omega^1_X\otimes L^\vee)) \neq 0$ となる。今 $\pi(x) = x' \notin Y$ と $\Omega^1_{X'}\otimes\pi_* L^\vee$ に対して始めに述べた事を適用する。従って次の様な curve C' が存在する。$C'\ni x'$, $C'\cap Y=\phi$, $H^0(X', \Omega^1_{X'}\otimes\pi_*L^\vee) = H^0(C', i'^*\Omega^1_{X'}\otimes i'^*\pi_*L^\vee)$。ところで $\pi^{-1}(C') = C \xhookrightarrow{i} X$ とすれば明らかに $i'^*\Omega^1_{X'} = i^*\Omega^1_X$, $i'^*\pi_*L^\vee = i^*L^\vee$ 又 $C\ni x$ よって $H^0(X', \Omega^1_{X'}\otimes\pi_*L^\vee)\neq 0$, π_*L は ample line bundle。従って X' において $N(1)$ が成立しなくなる。

K(1) についても，全く同様である。

Corollary 9. Y を $\mathbb{P}^N$ 又は abelian variety とする。X を Y 自身又は Y の subvariety として Y の Normal bundle $N_{X/Y}$ が ample line bundle による splitting を持つものとする。この時 $m = \dim X$ とすれば，X において $N(m-1)$ 従って $K(m-1)$ が成立する。

証明。Y が abelian variety であって $Y \neq X$ の時。$n = \dim Y$ とすれば $\Omega^1_Y = \overset{n}{\oplus}\, \mathcal{O}_Y$, $\check{N} = N_{X/Y} = (L_1, L_2, \cdots, L_{n-m})$, L_i ample line bundle なる splitting を持っている。次の sequence

$$0 \longrightarrow \check{N} \longrightarrow \overset{n}{\oplus}\, \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow 0$$

は exact，従って一般に $\Lambda^i \overset{n}{\oplus}\, \mathcal{O}_X$ は次の splitting を持つ。

(=) $(\Lambda^i \check{N},\ \Lambda^{i-1}\check{N}\otimes\Omega^1_X,\ \Lambda^{i-2}\check{N}\otimes\Omega^2_X,\ \cdots\cdots,\ \check{N}\otimes\Omega^{i-1}_X,\ \Omega^i_X)$。

X について $N(i)$ $i \leqq m-1$ が成立する事を i の induction で証明する。$i = 0$ の時は証明すべき事はなにもない。

$i > 0$ として $i-1$ まで OK とする。従って $K(i-1)$ も成立している。$H^l(X, \Omega^{i-l}\otimes\check{L}) \neq 0$ なる ample line bundle が存在したと仮定する。s_0 を十分大にとれば，すべての l について $H^l(X, \Omega^{i-l}\otimes\check{L}\otimes S^s(\check{L}\oplus\check{L}_1\oplus\cdots\oplus\check{L}_{n-m})) = 0$ $\forall s \geq s_0$ とできる。従って L を $L\otimes L^{t_0}\otimes L_1^{t_1}\otimes\cdots\otimes L_{n-d}^{t_{n-d}}$ ($t_i \geq 0$) なる形のものにとりかえて，次の様に思ってよい。

$0 \leqq {}^\exists l \leqq i$, $H^l(X, \Omega_X^{i-l} \otimes L^\vee) \neq 0$ で

$0 \leqq {}^\forall l \leqq i$, ${}^\forall(j) = (j_0, \cdots, j_{n-m})$, $j_t \geqq 0$, $(j) \neq (0)$

$H^l(X, \Omega_X^{i-l} \otimes L^\vee \otimes L^{\vee \otimes j_0} \otimes L_1^{\vee \otimes j_1} \otimes \cdots \otimes L_{n-m}^{\vee \otimes j_{n-m}}) = 0$ とできる。ところで $l \neq i$ のときには $H^l(X, \Omega_X^{i-l} \otimes L^\vee) = 0$ なる事が (＝)の splitting より分る。従って $H^i(X, L^\vee) \neq 0$

ところで $H^i(X, L^{\vee(p)}) = 0$ と induction の仮定より

Proposition 3 の 3つの exact sequence より

$H^i(X, L^\vee) \approx H^{i-1}(X, B_X^1 \otimes L^\vee) \approx H^{i-1}(X, Z_X^1 \otimes L^\vee) \approx \cdots\cdots$

$\approx H^0(X, B_X^i \otimes L^\vee) \approx H^0(X, Z_X^i \otimes L^\vee) \hookrightarrow H^0(X, \Omega_X^i \otimes L^{\vee(p)}) = 0$

となり これは矛盾，従って $N(i)$ が成立する。

$Y = \mathbb{P}^N$ の時も，もっとめんどうになるが同じ様に証明できる。

§4. Curve の時

X が Curve の時次の事が R-Hartshorn [1] によって問題とされた。"$F^*(1, \mathcal{O}_X)$ が injective ならば，すべての ample line bundle L に対して $F^*(1, L^\vee)$ も injective か？"

これは一般に正しくはない事が次の様に判明した。

X に associated な integer $n(X)$ を次の様に定義する。

先ず関数体 $K=K(X)$ の元 f に対して，$n(f)$ を次の様に定義する。

$$n(f) = \sum_{x\in X}\left[\frac{v_x(df)}{p}\right].$$

ここで [ ] はガウス記号，v_x は x に対応する K の valuation.
$n(X)$ は次の式で定義される。

$$n(X) = \max\{n(f)\ ;\ \text{st. } n(f)<\infty\}$$

容易に分る様に，$n(X) \leqq \left[\frac{1}{p}(2g-2)\right]$ である。(g は X の genus).

定理9. $n(X)$ は $\mathcal{B}^1_X$ の maximal line bundle の degree である。

証明。D を X の divisor とする。$\mathcal{O}(-D)$ を $-D$ に associated な line bundle とする。

この時，proposition 3 の (iii) 式に $\mathcal{O}(-D)$ を tensor した式より，$\mathcal{Z}^1_X \approx F_*\Omega^1_X$ なる事に注意して，次の式を得る。

(ホ)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(X, \mathcal{O}(-D)\otimes\mathcal{B}^1_X) \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi"] & H^0(X, \mathcal{O}(-D)\otimes F_*\Omega^1_X) \arrow[r, "C^*"] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & {} \\
& & H^0(X, \mathcal{O}(-pD)\otimes\Omega^1_X) &
\end{tikzcd}$$

一方，$H^0(X,\mathcal{O}(-pD)\otimes\Omega^1_X) \approx \{\omega\in\Omega^1(K)\ ;\ (\omega) > pD\}$ である。

ここで，$\Omega^1(K)=\Omega^1_X\otimes K$，$(\omega)$ は ω に associated な divisor である。

φ の image が C^* の kernel である事より，次の式を得る。

φ の image $\approx \{df\ ;\ f\in K,\ (df) > pD\}$

上式より定理の証明は容易である。

(4) 式と定理9 より，$n(X)>0$ という事は $F^*(1, \check{L})$ が injective とならない様な ample line bundle の存在を示している。次に Example であげる curve は $F^*(1, \mathcal{O}_X)$ が injective であるにもかかわらず，$n(X)$ は正である。

Example。$p \geqq 3$ とする。X を次の式で与えられる plane curve とする。

$$X_0^{p+1} = X_1 X_2 (X_0^{p-1} + X_1^{p-1} - X_2^{p-1})。$$

この時，$n(X) = [\frac{1}{p}(g-2)] = p-2$ である。この $n(X)$ を与える $f \in K$ は $\frac{X_0}{X_1}$ である。$F^*(1, \mathcal{O}_X)$ は injective であるが，証明はめんどうである。

文献

[1]. Hartshorne, R. Ample vector bundles on curves. Nagoya, Math. J. 43 (1971).

[2] Manin, Ju. I. The Hasse-Witt matrix of an algebraic curve. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math. 25 (1961)

[3] Serre, J. P. Sur la topologie des variétés algebriques en cara. p. Symp. Int. Top. Alg, Mexico, (1958).

[4] Seshadri, C. S. L'opération de Cartier. Applications. Exp. 6 Seminare C. Chevalley; Variétés de Picard 3 (1958/59)